Theorie der linearen Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus einem algebraischen Funktionenkörper

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät II. Sektion

der Ludwig-Maximilians-Universität

zu München

vorgelegt von

Hermann Schmidt

aus Merkendorf

Universitätsverlag von Robert Noske in Borna-Leipzig

1927

Berichterstatter: Professor Dr. O. Perron

Tag der mündlichen Prüfung: 6. Juli 1927

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt.

Seite

Vorbemerkung 1

§ 1. Der Körper der Koeffizienten 2

§ 2. Die Differentialgleichung in der Umgebung eines endlichen, schlichtblättrigen Punktes von $\mathfrak{R}$; Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten, der die Integrale von $D(u)=0$ genügen . . . 5

§ 3. Die Differentialgleichung an einem endlichen Verzweigungspunkt 16

§ 4. Reguläre Integrale an einem Verzweigungspunkt, insbesondere Fall, daß alle Koeffizienten regulär sind 18

§ 5. Regularität der Koeffizienten der transformierten Differentialgleichung am Verzweigungspunkt 22

§ 6. Die Differentialgleichung an einem unendlich fernen Punkt . . . 24

§ 7. Reguläre und singuläre Punkte der Differentialgleichung; die Fuchssche Klasse des Körpers 26

§ 8. Beispiele 32

§ 9. Bestimmung der Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse in $\mathfrak{R}$ 37

§ 10. Mannigfaltigkeit der Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse 40

§ 11. Die Fuchssche Beziehung auf $\mathfrak{R}$ 47

§ 12. Differentialgleichungen mit höchstens uneigentlich singulären Punkten 50

§ 13. „Nicht singuläre" Differentialgleichungen auf dem hyperelliptischen Gebilde 52

§ 14. Die Integrale in der ganzen Fläche 59

Schriftenverzeichnis.

Aus der umfangreichen Literatur sind nur diejenigen Werke und Arbeiten angeführt, die speziell herangezogen wurden.

I. Referate.

Hensel, K., Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II C. 5, 1921.

Hilb, E., Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II B. 5, 1913.

Schlesinger, L., Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 1909. Hier findet man auch die Literaturangaben für die in der Vorbemerkung erwähnten älteren Theorien, auf die, insofern sie als bereits fertig entwickelt zu gelten haben, nicht zurückgegriffen wurde.

II. Lehrbücher und Vorlesungen.

Fricke, R., Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. (I) II. Leipzig (Teubner) 1922.

Heffter, L., Einführung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen. Leipzig (Teubner) 1894.

Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen. Leipzig (Teubner) 1902. (Mit H. L. zitiert).

Horn, J., Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Sammlung Schubert, Leipzig (Göschen) 1905.

Klein, F., Über lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung. Autographierte Vorlesung. Göttingen 1894.

Jung, H., Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen. Berlin (Vereinigung wissenschaftl. Verleger, Walter de Gruyter) 1923.

Perron, O., Theorie der algebraischen Funktionen und Abelschen Integrale. Vorlesung München 1924. Handschriftlich.

— Lineare Differentialgleichungen. Vorlesung München 1925. Handschriftl.

Schlesinger, L., Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. Berlin (Walter de Gruyter) 1922.
— Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen I. II. Leipzig (Teubner) 1895/1898.
Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche. 2. Aufl. Leipzig (Teubner) 1923.

III. Einzelarbeiten.

Appell, Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs. Acta mathematica Bd. 13, 1890.
Groß, W., Zur invarianten Darstellung linearer Differentialgleichungen. Monatshefte für Mathematik und Physik Bd. 22, Wien 1910.
Klein, F., Über nirgends-singuläre Differentialgleichungen auf dem hyperelliptischen Gebilde. Math. Ann. Bd. 38, 1891.
König u. Krafft, Reihenentwicklungen analytischer Funktionen. Crelles Journal Bd. 154, 1925.
Pick, Zur Theorie der zu einem algebraischen Gebilde gehörigen Formen. Math. Ann. Bd. 50, 1898.
Thomé, Lineare Differentialgleichungen mit mehrdeutigen algebraischen Koeffizienten. Crelles Journal 115, 1895; 119, 1899; 121, 1900; 122, 1901.

Vorbemerkung.

Seit es eine eingehende Theorie der linearen Differentialgleichungen gibt, hat man neben dem Falle rationaler und in der Umgebung einer einzelnen Stelle eindeutiger Koeffizienten (Fuchs 1866, 1868) auch den Fall algebraischer Koeffizienten betrachtet. Schon Riemann gibt in seinem Fragment (1857) „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten" hierüber Andeutungen. Solchen Differentialgleichungen genügen z. B. nach Fuchs (1871 und später) die Perioden eines Abelschen Integrals als Funktionen eines Verzweigungspunktes (in speziellen Fällen reduzieren sich die Koeffizienten auf rationale Funktionen). Hierher gehören auch die Untersuchungen Hermites (1872 u. sp.) und Picards (1879 u. sp.) über die Lamésche und allgemeinere Differentialgleichungen mit elliptischen Funktionen als Koeffizienten, denn solche entstehen offenbar durch Einführung des Integrals 1. Gattung als unabhängige Veränderliche aus linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Funktionen vom Geschlecht 1 als Koeffizienten; diese Überführung ist deshalb vorteilhaft, weil man hier einen ausgebildeten Formelapparat zur Verfügung hat, im Gegensatz zu den höheren Fällen, wo man mittels automorpher Funktionen uniformisieren müßte. Ferner hat Klein und seine Schule (von 1894 an) invariantentheoretische Methoden in den Dienst unserer Theorie gestellt, wesentlich um die Form der „nirgends singulären" Differentialgleichungen 2. Ordg. auf den algebraischen Gebilden zu ermitteln. (Seine Definitionen und Abzählungen weichen indessen ganz von den im folgenden gegebenen ab, da er wesentlich auf die nichtlineare Differentialgleichung 3. Ordg. für den Integral-

quotienten achtet.) Eine systematische Theorie der linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten bahnen die Arbeiten von Thomé an (1895 u. sp.); merkwürdigerweise arbeitet er zumeist mit der Annahme, daß mehrere verschiedene algebraische Funktionen rational in den Koeffizienten auftreten, ein Fall, der sich doch auf den einer einzigen reduzieren läßt. Ferner hat die von Klein und Poincaré in den 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts begründete Theorie der automorphen Funktionen die Uniformisierung der algebraischen Funktionen und auch der Integrale linearer Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten geleistet und zwar mit Hilfe automorpher Funktionen mit Grenzkreis; dabei kann als uniformisierende Veränderliche der Integralquotient $\eta = \frac{u_2}{u_1}$ zweier linear unabhängiger Integrale einer gewissen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit algebraischen Koeffizienten gewählt werden. (Vgl. Schlesinger, Automorphe Funktionen S. 198 ff.)

Den Kern der vorliegenden Arbeit, die konsequente Definition und Aufstellung der Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse auf einer bestimmten Riemannschen Fläche auf Grund der arithmetisch-algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen scheint jedoch noch nicht entwickelt vorzuliegen.

---

§ 1.

Der Körper der Koeffizienten.

Vorgelegt sei eine lineare homogene Differentialgleichung $n$ter Ordnung:

$$D(u) \equiv \frac{d^n u}{dx^n} + f_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + f_2 \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \cdots + f_{n-1} \frac{du}{dx} + f_n u = 0$$

deren Koeffizienten f_ν algebraische Funktionen der komplexen Veränderlichen x sein sollen. Sind die f_ν nicht etwa sämtlich

rationale Funktionen, so ist also mindestens eine derselben, in der schlichten x-Ebene betrachtet, mehrdeutig. Die Differentialgleichung ist dann folgendermaßen zu verstehen: sei a ein Punkt derart, daß sich daselbst die Koeffizienten sämtlich in allen ihren Zweigen regulär verhalten; durch die Definition der Differentialgleichung soll dann, so fordern wir, zunächst nur eine Kombination $\mathfrak{P}_\nu(x-a)$ von eindeutigen Zweigen der f_ν als zulässig erklärt sein. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dx^n} + \mathfrak{P}_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \mathfrak{P}_2 \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \cdots + \mathfrak{P}_{n-1} \frac{du}{dx} + \mathfrak{P}_n u = 0$$

hat dann an der Stelle $x = a$ reguläre Koeffizienten; sie kann (in Analogie zu der Bezeichnung „Funktionselement") ein Element der Differentialgleichung $D(u) = 0$ genannt werden und man erhält den Gesamtinhalt von $D(u) = 0$ durch gleichzeitige analytische Fortsetzung der Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu$. Durch Angabe irgend eines ihrer Elemente ist die Differentialgleichung vollständig bestimmt. Durch diese Festsetzung ist z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{du}{dx} + \sqrt{x}\, u = 0$$

ihrem Gesamtinhalt nach als nicht verschieden von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{du}{dx} - \sqrt{x}\, u = 0$$

aufzufassen, da die Koeffizientensysteme durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen.

Dagegen ist die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{du}{dx} - \sqrt{x}\, u = 0$$

von der vorhergehenden verschieden.

Die oben geforderte gleichzeitige analytische Fortsetzung der f_ν kann nun aber auf die Beherrschung des Gesamtverlaufs einer einzigen algebraischen Funktion von x zurückgeführt werden. Man kann nämlich nach einem bekannten Satz der Algebra stets

auf mannigfache Weise eine rationale Funktion y der f_ν derart finden, daß sich alle f_ν als rationale Funktionen von y mit Koeffizienten aus $\Re(x)$ darstellen lassen (gleichzeitige Adjunktion mehrerer algebraischer Größen; Weber, Algebra Bd. 1 § 150; mit sorgfältigerer Beachtung der bei Funktionenkörpern vorliegenden Verhältnisse bei Fricke, Elliptische Funktionen 2. Teil III § 3); unter $\Re(x)$ ist dabei der Körper aller rationalen Funktionen von x mit beliebigen Zahlenkoeffizienten zu verstehen. Sei eine solche Größe y ausgewählt; dieselbe genügt dann einer eindeutig bestimmten, in $\Re(x)$ irreduziblen Gleichung

$$\Phi(x, y) \equiv y^m + \varphi_1(x)\, y^{m-1} + \varphi_2(x)\, y^{m-2} + \cdots + \varphi_m(x) = 0$$

wo die $\varphi_\mu(x)$ rationale Funktionen von x bedeuten sollen. Es sind dann die Funktionenkörper $\Re(x, f_1, \ldots f_n)$ und $\Re(x, y)$ identisch und man hat $f_\nu = R_\nu(x, y)$, wo die $R_\nu(x, y)$ rationale Funktionen von x und y sind, die als ganze rationale Funktionen höchstens $(m-1)$ten Grades von y angesehen werden können.

Wir gehen daher nunmehr umgekehrt von einer irreduziblen Gleichung $\Phi(x, y) = 0$ aus und betrachten lineare Differentialgleichungen mit der unabhängigen Veränderlichen x, deren Koeffizienten dem $\Re(x, y)$ angehören; sie mögen Differentialgleichungen in $\Re(x, y)$ heißen. Eine solche ist natürlich zugleich Differentialgleichung in allen Oberkörpern von $\Re$ und kann dann und nur dann Differentialgleichung in einem Unterkörper von $\Re$ sein, wenn die f_ν sämtlich keine primitiven Funktionen von $\Re$ sind — ein Fall, den wir nicht ausschließen wollen.

Zu der Gleichung $\Phi(x, y) = 0$ gehört eine m-blättrige, zusammenhängende über der x-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$, auf welcher die Funktion y und damit alle Funktionen des Körpers $\Re(x, y)$ eindeutig und bis auf Pole regulär sind. Sie hat eine endliche Anzahl L von Verzweigungspunkten q_λ mit den Blätterzahlen k_λ; darunter können auch unendlich ferne Punkte sein. Es sei $W = \sum_1^L (k_\lambda - 1)$ die Verzweigungszahl, dann definiert die Gleichung $p = \frac{W}{2} - m + 1$ das Geschlecht p der Fläche.

Sei $\mathfrak{a}$ mit dem x-Wert a ein beliebiger endlicher Punkt von $\mathfrak{R}$, k die zugehörige Blätterzahl; dann wird vermöge $x-a=t^k$ die schlichte Umgebung des Punktes $t=0$ der t-Ebene auf die k-fach gewundene des Punktes a der x-Ebene, d. i. auf die Umgebung von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}$ umkehrbar eindeutig abgebildet. Entsprechendes leistet die Transformation $\frac{1}{x}=t^k$ für einen k-blättrigen unendlich fernen Punkt $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{R}$. Jede Größe ξ aus $\mathfrak{R}(x,y)$ läßt sich in der Umgebung von $\mathfrak{a}$ (bzw. $\mathfrak{u}$) auf eine einzige Weise in der Form $\xi=\sum_{N}^{\infty_\nu} A_\nu t^\nu$ als Laurentsche Reihe mit höchstens endlich vielen negativen Potenzen von t darstellen. Wir denken N so gewählt, daß $A_N \neq 0$; alsdann heißt $N(\gtreqless 0)$ die Ordnungszahl der Funktion ξ im Punkte $\mathfrak{a}(\mathfrak{u})$; entsprechend wird die Ordnungszahl für jede im Punkte $\mathfrak{a}(\mathfrak{u})$ höchstens polar singuläre Funktion erklärt.

§ 2.

Die Differentialgleichung in der Umgebung eines endlichen, schlichtblättrigen Punktes von $\mathfrak{R}$; Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten, der die Integrale von $D(u)=0$ genügen.

Um unsere Differentialgleichung in der Umgebung eines schlichten Punktes von $\mathfrak{R}$ zu studieren, können wir ohne weiteres die bekannten Sätze über die Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung eines Eindeutigkeitspunktes der Koeffizienten übertragen.

Sei also $\mathfrak{a}$ mit $x=a$ ein endlicher, einblättriger Punkt von $\mathfrak{R}$. Dann ist $f_\nu=\sum_{s}^{\infty_\lambda} a_{\nu\lambda}(x-a)^\lambda$, $(s \gtreqless 0)$ wobei mindestens einer der Koeffizienten $a_{\nu s} \neq 0$ und die Reihen sämtlich für $0<|x-a|<r$ konvergieren. ($r=$ Min. r_ν wenn die Entwicklung f_ν für $0<|x-a|<r_\nu$ konvergent ist.)

Ist zunächst $s \geqq 0$, d. h. sind alle f_ν in $\mathfrak{a}$ regulär, so gibt es nach den allgemeinen Existenzsätzen ein Fundamentalsystem von Integralen

$$u_\nu = \sum_0^\infty{}^\lambda D_{\nu\lambda}(x-a)^\lambda \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

wo die Reihen für $|x-a| < r$ konvergieren und jedes in $\mathfrak{a}$ reguläre Integral läßt sich in die Form setzen $v = \sum_1^n{}^\nu c_\nu u_\nu$, unter c_ν Konstante verstanden. Wir nennen u_ν ein zum Punkte $\mathfrak{a}$ gehöriges Fundamentalsystem; es ist natürlich nicht dem Punkt a der x-Ebene eindeutig zugeordnet, da es ja mit den dem betreffenden Blatt von $\mathfrak{R}$ entsprechenden Bestimmungen der f_ν gebildet ist; und jedem weiteren etwa über a liegenden Punkt $\mathfrak{a}^*$, der die gleichen Voraussetzungen erfüllt wie $\mathfrak{a}$, entspricht ein weiteres Fundamentalsystem

$$u_\nu^* = \sum_0^\infty{}^\lambda D_{\nu\lambda}^*(x-a)^\lambda \quad .$$

Es sei nun $\mathfrak{P}(x-b)$ ein beliebiges Funktionselement, das die Differentialgleichung in der Umgebung der schlichten Stelle $\mathfrak{b}$ erfüllt, und $\mathfrak{C}$ ein Weg auf $\mathfrak{R}$, der $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}$ verbindet, ohne einen singulären Punkt einer der Funktionen f_ν oder einen Verzweigungspunkt von $\mathfrak{R}$ zu treffen. Zu jedem Punkt $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{C}$ existiert dann ein Fundamentalsystem, dessen Elemente für alle $\mathfrak{c}$ für $|x-c| < r_0$ konvergieren, wo r_0 fest ist; da es nur endlich viele singuläre Punkte und Verzweigungspunkte gibt, kann man ein solches $r_0\,(>0)$ angeben; eine endliche Zahl von Kreisen r_0 mit den Mittelpunkten auf $\mathfrak{C}$ genügt dann, um $\mathfrak{C}$ vollständig zu überdecken; je zwei aufeinanderfolgende müssen ein Stück gemeinsam haben, sodaß sich $\mathfrak{P}(x-b)$ längs $\mathfrak{C}$ fortsetzen läßt, und man hat jeweils $\overline{\mathfrak{P}}(x-c) = \sum_1^m{}^\nu \overline{c_\nu}\, v_\nu$, unter v_ν ein zu $\mathfrak{c}$ gehöriges Fundamentalsystem, unter $\overline{\mathfrak{P}}$ die Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x-b)$ nach $\mathfrak{c}$ verstanden. Somit ergibt sich schließlich $\mathfrak{Q}(x-a) = \sum_1^n{}^\nu C_\nu u_\nu$, d. h. in diesem Sinne läßt sich jedes Integral durch das Fundamentalsystem u_ν linear homogen mit konstanten Koeffizienten ausdrücken; kein Integral kann also $\mathfrak{a}$ zur singulären Stelle haben.

Mit Hilfe dieses Existenzsatzes läßt sich übrigens die nicht homogene Differentialgleichung

(1) $$D(u) = F \qquad (F \not\equiv 0)$$

wo F ebenfalls aus $\mathfrak{R}(x, y)$, vollständig auf die Integration einer homogenen zurückführen. Alle Integrale von (1) genügen ja bekanntlich der homogenen Differentialgleichung $(n+1)$ ter Ordnung

(2) $$F\frac{d\,D(u)}{dx} - F'\,D(u) = 0$$

die ebenfalls Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ hat. Sei $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$ ein zu einem schlichten Punkte von $\mathfrak{R}$, an welchem die f_ν und $\frac{F'}{F}$ regulär, gehöriges Fundamentalsystem. Dann ist offenbar

$$D(u_\nu) = c_\nu F$$

wo nicht alle Konstanten c_ν verschwinden können, da $D(u) = 0$ (d. h. der betreffende Zweig der Differentialgleichung) nicht mehr als n linear unabhängige Integrale besitzt; sei z. B. $c_{n+1} \not\equiv 0$. Dann sind alle und nur diejenigen Lösungen von (2), die (1) erfüllen — also alle und nur die Lösungen von (1) — in der Form enthalten

$$u = \sum_1^{n+1} C_\nu u_\nu \quad \text{wo} \quad \sum_1^{n+1} C_\nu c_\nu = 1, \quad \text{also}$$

$$u = \sum_1^{n} C_\nu u_\nu + \frac{1 - \sum_1^{n} C_\nu c_\nu}{c_{n+1}} u_{n+1}$$

das allgemeine Integral von (1)

Wir beschränken uns daher stets auf die Betrachtung der homogenen Differentialgleichung.

Bemerken wir zunächst, daß die Reihen u_ν auch noch für $|x - a| > r$ konvergent sein können; sei z. B. in $\mathfrak{R}(x, \sqrt{x+1})$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x\sqrt{x+1}}, \quad \text{also } u = C\,\frac{x + 2 - 2\sqrt{x+1}}{x}$$

dann hat die nach Potenzen von $x-1$ fortschreitende Entwicklung am Punkte $\begin{cases} x=1;\ y=\sqrt{2} \\ x=1;\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ offenbar bzw. den Konvergenzradius $\begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$, während $r=1$ ist.

Dagegen gilt folgender Satz: es mögen nicht alle f_ν einem und demselben echten Unterkörper von $\Re(x,y)$ angehören; die Verzweigungsschnitte der Riemann schen Fläche sollen etwa als die Verlängerungen der Strahlen von $\mathfrak{a}$ und den konjugierten Punkten nach den Verzweigungspunkten $\mathfrak{q}_\lambda$ gewählt sein. Sei dann $\mathfrak{q}$ der nächste im gleichen Blatt mit $\mathfrak{a}$ gelegene Verzweigungspunkt. Dann können nicht alle Entwicklungen für $|x-a|>\overline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{q}}$ konvergieren. Denn bei einem Umlauf in hinreichender Nähe um den zu $\mathfrak{q}$ gehörigen x-Wert gingen sonst alle u_ν in sich über, dagegen die dem Blatte von $\mathfrak{a}$ entsprechenden Bestimmungen f_ν der Koeffizienten in $\overline{f}_\nu$, wo nicht alle $\overline{f}_\nu \equiv f_\nu$ sind; blieben nämlich alle f_ν beim Umlauf ungeändert, so auch alle Größen von $\Re(x,f_1 \ldots f_n)$, zu denen also dann y nicht gehören könnte, weil es in $\mathfrak{q}$ einen Verzweigungspunkt besitzt, und das widerspräche der Annahme, daß $\Re(x,f_1,\ldots f_n)$ kein echter Unterkörper von $\Re(x,y)$ sein sollte. Die beiden Differentialgleichungen

$$\sum_0^n{}^{\nu} f_\nu \frac{d^{n-\nu}u}{dx^{n-\nu}}=0 \quad \text{und} \quad \sum_0^n{}^{\nu} \overline{f}_\nu \frac{d^{n-\nu}u}{dx^{n-\nu}}=0$$

würden dann von den nämlichen Potenzreihen u_ν erfüllt werden, was nicht möglich ist, da die Koeffizienten einer linearen Differentialgleichung in bekannter Weise als Determinantenquotienten durch ein Fundamentalsystem eindeutig bestimmt sind (wenn man, wie wir es stets tun, den Koeffizienten der höchsten Ableitung gleich Eins setzt).

Wir wollen nun eine Methode angeben, um gleichzeitig in m übereinanderliegenden konjugierten Punkten der Fläche ein Fundamentalsystem zu bestimmen, und zwar durch Integration von Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Das hat gewisse Vorteile; z. B. kommt

man bei Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten bekanntlich mit einer Rekursionsformel von beschränkter Gliederzahl aus.

Es mögen über $x=a$ die m konjugierten Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$ gelegen sein. Dortselbst sollen sich die Koeffizienten der Differentialgleichung $\sum_0^n f_\nu \frac{d^{n-\nu} u}{d x^{n-\nu}} = 0$ regulär verhalten. Es sei $\eta^{(\mu)}$ $(\mu = 1,2, \ldots m)$ ein System rational unabhängiger Funktionen aus $\mathfrak{R}(x,y)$, welches für $x=a$ normal ist inbezug auf den Divisor $\mathfrak{a}_1^0 \mathfrak{a}_2^0 \ldots \mathfrak{a}_m^0$ (Jung, Algebraische Funktionen S. 111), und $\eta_\lambda^{(\mu)}$ $(\lambda = 1,2, \ldots m)$ die m Zweige derselben.

Die Behauptung ist dann: Man kann zu jedem der Punkte $\mathfrak{a}_\lambda$ ein Fundamentalsystem der Form finden:

$$u_{\nu\lambda} = \sum_1^m U_\nu^{(\mu)} \eta_\lambda^{(\mu)} \qquad (\nu = 1,2 \ldots n),$$

wobei die $U_\nu^{(\mu)}$ Potenzreihen nach $x-a$ sind. Wir schreiben es auch

$$u_\nu = \sum_1^m U_\nu^{(\mu)} \eta^{(\mu)}.$$

wobei wir auf die Unterscheidung der m Zweige verzichten.

Zum Beweis machen wir den Ansatz:

$$u = \sum_1^m U^{(\mu)} \eta^{(\mu)}.$$

Es wird dann

$$\frac{d^{n-\nu} u}{d x^{n-\nu}} = \sum_1^m \sum_0^{n-\nu} \binom{n-\nu}{\lambda} \frac{d^\lambda U^{(\mu)}}{d x^\lambda} \frac{d^{n-\nu-\lambda} \eta^{(\mu)}}{d x^{n-\nu-\lambda}} \qquad (\nu = 0,1,2, \ldots n)$$

insbesondere für $\nu = 0$

$$\frac{d^n u}{d x^n} = \sum_1^m \frac{d^n U^{(\mu)}}{d x^n} \eta^{(\mu)} + \sum_1^m \sum_0^{n-1} \binom{n}{\lambda} \frac{d^\lambda U^{(\mu)}}{d x^\lambda} \frac{d^{n-\lambda} \eta^{(\mu)}}{d x^{n-\lambda}},$$

somit

$$D(u) \equiv \sum_0^n f_\nu \frac{d^{n-\nu} u}{d x^{n-\nu}} =$$

$$\sum_1^m \left(\frac{d^n U^{(\mu)}}{d x^n} \eta^{(\mu)} + \sum_0^{n-1} \binom{n}{\lambda} \frac{d^\lambda U^{(\mu)}}{d x^\lambda} \frac{d^{n-\lambda} \eta^{(\mu)}}{d x^{n-\lambda}} \right)$$

$$+\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\ \sum_{1}^{m}{}_{\mu}\ \sum_{0}^{n-\nu}{}_{\lambda}\binom{n-\nu}{\lambda} f_\nu \frac{d^\lambda U^{(\mu)}}{dx^\lambda} \frac{d^{n-\nu-\lambda}\eta^{(\mu)}}{dx^{n-\nu-\lambda}}$$

$$=\sum_{1}^{m}{}_{\mu}\left(\frac{d^n U^{(\mu)}}{dx^n}\eta^{(\mu)}+\sum_{0}^{n-1}{}_{\lambda}\binom{n}{\lambda}\frac{d^\lambda U^{(\mu)}}{dx^\lambda}\frac{d^{n-\lambda}\eta^{(\mu)}}{dx^{n-\lambda}}\right)$$

$$+\sum_{1}^{m}{}_{\mu}\ \sum_{0}^{n-1}{}_{\lambda}\frac{d^\lambda U^{(\mu)}}{dx^\lambda}\sum_{1}^{n-\lambda}{}_{\nu}\left\{\binom{n-\nu}{\lambda} f_\nu \frac{d^{n-\nu-\lambda}\eta^{(\mu)}}{dx^{n-\nu-\lambda}}\right\}.$$

Da nun alle $\eta^{(\mu)}$ in den schlichten Punkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_m$ regulär sind, so sind es auch ihre Ableitungen; überdies sind diese gleichfalls Funktionen des Körpers, da sie ja auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf Pole analytisch sind. Somit ist

$$\binom{n}{\lambda}\frac{d^{n-\lambda}\eta^{(\mu)}}{dx^{n-\lambda}}=\sum_{1}^{m}{}_{\varkappa} g_{\lambda\mu}^{(\varkappa)}(x)\,\eta^{(\varkappa)},$$

wo wegen der Annahme über das System $\eta^{(\mu)}$ die $g_{\lambda\mu}^{(\varkappa)}(x)$ rationale, in $x=a$ reguläre Funktionen bedeuten. Da auch die f_ν in $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_m$ reguläre Funktionen des Körpers sind, so ist

$$\sum_{1}^{n-\lambda}{}_{\nu}\binom{n-\nu}{\lambda} f_\nu \frac{d^{n-\nu-\lambda}\eta^{(\mu)}}{dx^{n-\nu-\lambda}}=\sum_{1}^{m}{}_{\varkappa} h_{\lambda\mu}^{(\varkappa)}(x)\,\eta^{(\varkappa)},$$

und dabei haben die Funktionen $h_{\lambda\mu}^{(\varkappa)}(x)$ die nämliche Eigenschaft wie $g_{\lambda\mu}^{(\varkappa)}(x)$.

Setzt man noch

$$g_{\lambda\mu}^{(\varkappa)}(x)+h_{\lambda\mu}^{(\varkappa)}(x)=G_{\lambda\mu}^{(\varkappa)}(x),$$

so wird

$$D(u)=\sum_{1}^{m}{}_{\varkappa}\left\{\frac{d^n U^{(\varkappa)}}{dx^n}+\sum_{1}^{m}{}_{\mu}\sum_{0}^{n-1}{}_{\lambda} G_{\lambda\mu}^{(\varkappa)}(x)\frac{d^\lambda U^{(u)}}{dx^\lambda}\right\}\eta^{(\varkappa)}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet wegen Det. $|\eta_\lambda^{(\varkappa)}| \neq 0$ dann und nur dann in allen Zweigen identisch, wenn die $U^{(\varkappa)}$ dem System von m linearen homogenen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten und der regulären Stelle $x=a$ genügen:

$$\frac{d^n U^{(\varkappa)}}{dx^u}+\sum_{0}^{n-1}{}_{\lambda}\sum_{1}^{m}{}_{\mu} G_{\lambda\mu}^{(\varkappa)}(x)\frac{d^\lambda U^{(\mu)}}{dx^\lambda}=0.$$

Wir können es als System 1. Ordnung mit mn Unbekannten

$$V^{(\iota,\varkappa)} = \frac{d^\iota U^{(\varkappa)}}{dx^\iota} \begin{pmatrix} \iota = 0, 1, 2 \ldots n-1 \\ \varkappa = 1, 2, \quad \ldots m \end{pmatrix}$$

betrachten, wenn wir noch die $m(n-1)$ Gleichungen hinzufügen

$$\frac{dV^{(\iota,\varkappa)}}{dx} = V^{(\iota+1,\varkappa)} \begin{pmatrix} \iota = 0, 1, 2, \ldots n-2 \\ \varkappa = 1, 2, \quad \ldots m \end{pmatrix}$$

und dann oben schreiben

$$\frac{dV^{(n-1,\varkappa)}}{dx} + \sum_1^m{}_\mu \sum_0^{n-1}{}_\lambda G^{(\varkappa)}_{\lambda\mu}(x) V^{(\lambda,\mu)} = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots m).$$

Es gibt sonach ein Fundamentalsystem von Lösungssystemen

$$V^{(\iota,\varkappa)}_\nu \quad \text{f. } \nu = 1, 2, \ldots mn, \quad \text{bzw. } U^{(\mu)}_\nu \text{ f. } \nu = 1, 2 \ldots mn,$$

für welches die Determinante

$$\Delta = \left| V^{(0,1)}_\nu \ldots V^{(0,m)}_\nu V^{(1,1)}_\nu \ldots V^{(1,m)}_\nu \ldots V^{(n-1,1)}_\nu \ldots V^{(n-1,m)}_\nu \right|,$$

also die Determinante

$$\Delta = \left| U^{(1)}_\nu U^{(2)}_\nu \ldots U^{(m)}_\nu \frac{dU^{(1)}_\nu}{dx} \ldots \frac{dU^{(m)}_\nu}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}U^{(1)}_\nu}{dx^{n-1}} \ldots \frac{d^{n-1}U^{(m)}_\nu}{dx^{n-1}} \right|$$

nicht identisch verschwindet.

Es seien mit $U^{(\mu)}_1, U^{(\mu)}_2 \ldots U^{(\mu)}_n$ irgend n solcher Lösungssysteme bezeichnet. Es kann dann keine Relation

$$\sum_1^n{}_\nu C_\nu U^{(\mu)}_\nu \equiv 0$$

mit festen C_ν $\left(\sum_1^n{}_\nu |C_\nu| > 0;\ \mu = 1, 2, \ldots m\right)$ bestehen, denn sonst folgte

$$\sum_1^n{}_\nu C_\nu \frac{d^\lambda U^{(\mu)}_\nu}{dx^\lambda} \equiv 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n-1),$$

also offenbar

$$\Delta \equiv 0.$$

Jetzt betrachten wir das System von Integralen der Gleichung $D(u) = 0$:

$$u_\nu = \sum_1^m{}_\mu U^{(\mu)}_\nu \eta^{(\mu)}.$$

Es ist ein Fundamentalsystem. Denn aus

$$\sum_1^n C_\nu u_\nu = \sum_1^m \eta^{(\mu)} \sum_1^n C_\nu U_\nu^{(\mu)} \equiv 0$$

würde wegen Det. $|\eta_\lambda^{(\mu)}| \not\equiv 0$ folgen $\sum_1^n C_\nu U_\nu^{(\mu)} \equiv 0$, gegen das Bewiesene.

Damit ist in allen Zweigen gleichzeitig ein Fundamentalsystem gewonnen.

Hier genügen die Funktionen $U^{(\mu)}$ linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Man kann aber auch eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten angeben, der alle Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung genügen. (Schlesinger, Handb. I S. 218, 240, II S. 529; Thomé, Crelles Journ. Bd. 115 S. 140 ff.)

Es seien nämlich wieder über dem Punkte $x = a$ m getrennte Punkte von $\mathfrak{R}$ gelegen, an denen sich alle f_ν regulär verhalten. Zu jedem von ihnen gehört ein Fundamentalsystem von Integralen

$$u_{\mu\nu} \quad \text{f. } \mu = 1, 2, \ldots m; \; \nu = 1, 2, \ldots n$$

entsprechend den m zu der Stelle $x = a$ der schlichten x-Ebene gehörigen Differentialgleichungen, die wir jetzt mit $D(u, x, y_u) = 0$ bezeichnen wollen. Es seien von den mn Funktionen $u_{\mu\nu}$ l linear unabhängig, etwa $u_1, u_2 \ldots u_l$, während die übrigen lineare homogene Funktionen derselben mit festen Koeffizienten sein sollen. Die u_λ bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$D^{(l)}(u) \equiv u^{(l)} + \psi_1 u^{(l-1)} + \psi_2 u^{(l-2)} + \cdots + \psi_l u = 0,$$

wobei

$$\psi_\lambda = -\frac{\left| u_\varkappa^{(l-1)} u_\varkappa^{(l-2)} \ldots u_\varkappa^{(l-\lambda+1)} u_\varkappa^{(l)} u_\varkappa^{(l-\lambda-1)} \ldots u_\varkappa \right|}{\left| u_\varkappa^{(l-1)} u_\varkappa^{(l-2)} \ldots u_\varkappa^{(l-\lambda+1)} u_\varkappa^{(l-\lambda)} u_\varkappa^{(l-\lambda-1)} \ldots u_\varkappa \right|};$$

hier ist jeweils nur die $\varkappa$te Zeile der gemeinten $l$reihigen Determinanten angeschrieben und der Nenner verschwindet nicht identisch, da die u_λ linear unabhängig sind. Es mögen $u_1, u_2, \ldots u_n$ ein Fundamentalsystem für $D(u, x, y_1) = 0$ sein (wir können ja bei der Auswahl der u_λ von einem solchen ausgehen); ferner sei

$v_\nu = \sum_1^n c_{\nu\lambda} u_\lambda$ ein ebensolches, sodaß also die Determinante $|c_{\nu\lambda}| \neq 0$ ist.

Jetzt wird z. B. für die Nennerdeterminante

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_1' & \dots & v_1^{(l-1)} \\ v_2 & v_2' & \dots & v_2^{(l-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n & v_n' & \dots & v_n^{(l-1)} \\ u_{n+1} & u_{n+1}' & \dots & u_{n+1}^{(l-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_l & u_l' & \dots & u_l^{(l-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_1' & \dots & u_1^{(l-1)} \\ u_2 & u_2' & \dots & u_2^{(l-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_n' & \dots & u_n^{(l-1)} \\ u_{n+1} & u_{n+1}' & \dots & u_{n+1}^{(l-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_l & u_l' & \dots & u_l^{(l-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} \dots c_{n1} & 0 0 \dots 0 \\ c_{12} \dots c_{n2} & 0 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ c_{1n} \dots c_{nn} & 0 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 1 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 1 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 0 \dots 1 \end{vmatrix}$$

wie man durch Determinantenmultiplikation nach Spalten leicht erkennt; entsprechende Beziehungen gelten für die Zählerdeterminanten. Somit bleibt der Koeffizient ψ_λ beim Übergang zu dem neuen Fundamentalsystem v_ν unverändert. Ersetzen wir nunmehr vermöge der Gleichung $D(u, x, y_1) = 0$ und der durch fortgesetzte Differentiation daraus hervorgehenden Gleichungen die Größen $u_x^{(\varrho)}$ f. $\varrho = n, n+1, \dots l$ durch $u_x, u_x', u_x'', \dots u_x^{(n-1)}$! Man kann der Matrix $\left(u_x^{(\varrho)}\right)\begin{Bmatrix} x = 1, 2, \dots n \\ \varrho = 0, 1, \dots n-1 \end{Bmatrix}$ für $x = a$ durch passende Wahl der $c_{\nu\lambda}$ jeden beliebigen Wert zuerteilen, für den nur die Determinante $|u_x^{(\varrho)}(a)| \neq 0$ ist; das bedeutet einfach den Übergang zu anderen Fundamentalsystemen, und dabei ändert sich ψ_λ nicht; somit ist ψ_λ, das eine rationale Funktion der $u_x^{(\varrho)}$ ist, in Wahrheit von diesen Veränderlichen unabhängig und eine rationale Funktion der Koeffizienten von $D(u, x, y_1) = 0$, die außerdem in den Koeffizienten $u_{n+1}^{(\varrho)} \dots u_l^{(\varrho)}$ enthält. Fährt man nun in dieser Weise fort, so ergibt sich, daß ψ_λ eine rationale Funktion von $x, y_1, y_2, \dots y_m$ ist, also eine algebraische Funktion von x.

Andererseits ist aber ψ_λ eine eindeutige Funktion von x. In der Tat, bei einem beliebigen, die singulären Punkte der f_ν vermeidenden geschlossenen Umlauf in der x-Ebene erleiden die

$u_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots l)$ nur lineare homogene Substitutionen, denn es gehen z. B. $u_1, u_2, \ldots u_n$ in lineare homogene Funktionen ihrer selbst $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots \bar{u}_n$ über, die einer Differentialgleichung $D(u, x, \bar{y}_1) = 0$ genügen, wenn y_1 sich beim Umlauf in $\bar{y}_1$ verwandelt hat; da aber die Integrale diese Differentialgleichung sich linear aus den $u_{\mu\nu}$ zusammensetzen, so auch aus den u_λ f. $\lambda = 1, 2, \ldots l$.

Also ist $\bar{u}_\varkappa = \sum_1^l{}_\nu d_{\varkappa\nu} u_\nu$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots l)$ mit Det. $|d_{\varkappa\nu}| \neq 0$,

woraus wegen $\bar{u}_\varkappa^{(\varrho)} = \sum_1^l{}_\nu d_{\varkappa\nu} u_\nu^{(\varrho)}$ auf Grund des Multiplikationssatzes der Determinanten die Behauptung ohne weiteres folgt. Natürlich folgt nicht, daß nun jedes Integral der Differentialgleichung 2.) $D^{(l)}(u) = 0$ der ursprünglichen 1.) $D(u) = 0$ (d. h. einer ihrer Zweiggleichungen $D(u, x, y_\mu) = 0$) genügen müßte, wie das die einfachsten Beispiele lehren, etwa $D(u) \equiv \frac{du}{dx} - \frac{u}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ mit $u = C\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$; $D^{(2)}(u) \equiv \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{x}{x^2+1}\frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2+1} = 0$ mit den Integralen $\begin{cases} u_1 = x \\ u_2 = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$. Aus dem Vorhergehenden läßt sich nur schließen, daß man aus der l-fachen linearen Schar der Integrale von 2.) auf m Arten je n linear unabhängige so auswählen kann, daß sie bzw. ein Fundamentalsystem für $D(u, x, y_\mu) = 0$ vorstellen. Die Integration von 1.) ist also noch nicht vollständig geleistet, wenn 2.) integriert ist, und wir erhalten keine unmittelbare Auskunft über das Verhalten der Integrale in bezug auf die ursprünglich vorgelegte Riemannsche Fläche.

Wir setzen daher die unmittelbare Untersuchung der Differentialgleichung auf $\mathfrak{R}$ fort und betrachten nunmehr den Fall, daß s (S. 5) negativ ist. Es ist dann mindestens einer der Koeffizienten in $\mathfrak{a}$ singulär. Sei $\mathfrak{b}$ ein Punkt einer schlichten Kreisumgebung von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{R}$, in der, abgesehen von $\mathfrak{a}$ selbst, alle f_ν regulär sind; einen solchen Punkt gibt es natürlich, da sich in $\mathfrak{a}$ keine Pole häufen können. Nach dem Obigen gibt es ein zu

b gehöriges Fundamentalsystem v_ν der Differentialgleichung. Setzt man dieses um den Punkt a der x-Ebene analytisch fort, etwa längs des Kreises $|x-a|=|b-a|$, so bleibt die Differentialgleichung stets erfüllt; da dabei die Koeffizienten f_ν zum Ausgangswert zurückkehren, so folgt, daß aus v_ν geworden ist:

$$\bar{v}_\nu = \sum_1^n{}_\lambda a_{\nu\lambda} v_\lambda, \text{ wo Det.} |a_{\nu\lambda}| = |A| \neq 0.$$

Hieraus erschließt man, wie in der klassischen Theorie die Existenz eines zu a gehörigen Fundamentalsystems, welches sich in Gruppen der Form zerlegt

$$u_\lambda = (x-a)^r \left(\varphi_{\lambda 0} + \varphi_{\lambda 1} \lg(x-a) + \cdots \varphi_{\lambda,\lambda-1} \left(\lg(x-a)\right)^{\lambda-1}\right);$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots \lambda_0$$

hierbei sind $\varphi_{\lambda 0}, \varphi_{\lambda 1} \ldots \varphi_{\lambda,\lambda-1}$ Laurentsche Reihen; ferner ist $r = \frac{1}{2\pi i} \lg \omega$ und ω eine λ_0-fache Wurzel der zum Umlauf gehörigen Fundamentalgleichung Det. $|A-\omega E| = 0$; r ist nur bis auf eine additive ganze Zahl bestimmt.

Es kann sein, daß einige dieser Lösungen nur Laurentsche Entwicklungen enthalten, in denen nur endlich viele negative Potenzen vorkommen; man kann dann durch passende Wahl von r dafür Sorge tragen (und zwar auf genau eine Weise), daß die betreffenden $\varphi_{\lambda z}$ gewöhnliche Taylorsche Reihen werden (deren konstante Glieder nicht alle Null sind); man sagt dann, das betreffende Integral verhalte sich in a bestimmt; verhalten sich alle Integrale bestimmt, so heißt a eine singuläre Stelle der Bestimmtheit. Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß für $\lambda < -\nu$ alle $a_{\nu\lambda} = 0$ sind, d. h. die Koeffizienten f_ν Pole höchstens ν-ter Ordnung in a aufweisen, oder, was dasselbe ist, in a mindestens die Ordnungszahl $-\nu$ besitzen.

Hat nun eine Differentialgleichung mit eindeutigen Koeffizienten nur singuläre Stellen der Bestimmtheit im Endlichen und Unendlichen (dem man durch $x = \frac{1}{t}$ beikommt), so heißt sie von der Fuchsschen Klasse; um diesen Begriff auf $\mathfrak{R}$ zu über-

tragen, haben wir die Verzweigungspunkte ins Auge zu fassen; dort liegen die Verhältnisse anders als an den schlichtblättrigen Punkten, für deren Umgebung die gewöhnliche Theorie ohne weiteres anwendbar blieb.

§ 3.

Die Differentialgleichung an einem endlichen Verzweigungspunkt.

Es sei α ein k-blättriger Verzweigungspunkt von $\mathfrak{R}$; wir führen dann wie § 1 vermöge $x-a=t^k$ die unabhängige Veränderliche t ein. Man erhält dann der Reihe nach $(t \neq 0)$

$$u = u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{k t^{k-1}} \frac{du}{dt};$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{k^2 t^{2k-2}} \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{k-1}{k^2 t^{2k-1}} \frac{du}{dt};$$

. . . . . .

allgemein für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{d^\nu u}{dx^\nu} = \frac{1}{k^\nu} \sum_0^\nu{}^{\lambda} \frac{\gamma_{\nu\lambda}}{t^{\nu k-\lambda}} \frac{d^\lambda u}{dt^\lambda}, \text{ wo } \begin{cases} \gamma_{00} = 1 \\ \gamma_{0\lambda} = 0 \text{ f. } \lambda \neq 0 \\ \gamma_{\nu 0} = 0 \text{ f. } \nu \neq 0 \end{cases}$$

gesetzt ist und allgemein unter $\gamma_{\nu\lambda}$ gewisse Konstante verstanden werden. In der Tat haben die Ausdrücke für $\nu = 0, 1, 2$ die angegebene Form und man bestätigt die allgemeine Richtigkeit leicht durch vollständige Induktion; denn angenommen, die Formel gelte für ein bestimmtes ν, so folgt durch Differenzieren

$$\frac{d^{\nu+1}u}{dx^{\nu+1}} = \frac{1}{k^{\nu+1}} \left\{ \sum_0^\nu{}^{\lambda} \frac{\gamma_{\nu\lambda}}{t^{(\nu+1)k-(\lambda-1)}} \frac{d^{\lambda+1}u}{dt^{\lambda+1}} - \frac{(\nu k-\lambda)\gamma_{\nu\lambda}}{t^{\nu k-\lambda+k}} \frac{d^\lambda u}{dt^\lambda} \right\}$$

$$= \frac{1}{k^{\nu+1}} \left\{ \sum_1^{\nu+1}{}^{\lambda} \frac{\gamma_{\nu,\lambda-1}}{t^{(\nu+1)k-\lambda}} \frac{d^\lambda u}{dt^\lambda} - \sum_0^\nu{}^{\lambda} \frac{(\nu k-\lambda)\gamma_{\nu\lambda}}{t^{(\nu+1)k-\lambda}} \frac{d^\lambda u}{dt^\lambda} \right\}$$

$$= \frac{1}{k^{\nu+1}} \sum_0^{\nu+1}{}^{\lambda} \frac{\gamma_{\nu+1,\lambda}}{t^{(\nu+1)k-\lambda}} \frac{d^\lambda u}{dt^\lambda},$$

wenn man setzt

$\gamma_{\nu+1,1} = -\gamma_{\nu 1}(\nu k-1) = (-1)^{\nu}(\nu k-1)\left((\nu-1)k-1\right) \ldots (k-1)$;
$\gamma_{\nu+1,0} = 0$; $\gamma_{\nu+1,\nu+1} = \gamma_{\nu\nu} = 1$ und für $\lambda \neq 0, \nu+1$

$$\gamma_{\nu+1,\lambda} = \gamma_{\nu,\lambda-1} - (\nu k-\lambda)\gamma_{\nu\lambda}.$$

Die Konstanten $\gamma_{\nu\lambda}$ sind eindeutig bestimmt.

Setzt man die erhaltenen Werte für $\frac{d^{\nu} u}{d x^{\nu}}$ nunmehr in die Differentialgleichung ein, so wird diese (wenn wir $f_0 = 1$ setzen)

$$D(u) = \sum_0^n{}^{\nu} f_{\nu} \frac{d^{n-\nu} u}{d x^{n-\nu}} = \sum_0^n{}^{\nu} f_{\nu} \sum_0^{n-\nu}{}^{\lambda} \frac{\gamma_{n-\nu,\lambda}}{k^{n-\nu} t^{(n-\nu)k-\lambda}} \frac{d^{\lambda} u}{d t^{\lambda}}$$

$$= \sum_0^n{}^{\nu} \frac{f_{\nu}}{k^{n-\nu}} \sum_{\nu}^n{}^{\lambda} \frac{\gamma_{n-\nu,\,n-\lambda}}{t^{(n-\nu)k-(n-\lambda)}} \frac{d^{n-\lambda} u}{d t^{n-\lambda}} = 0$$

oder nach Multiplikation mit $k^n t^{n(k-1)}$

$$\bar{D}_t(u) = \sum_0^n{}^{\lambda} \bar{f}_{\lambda}(t) \frac{d^{n-\lambda} u}{d t^{n-\lambda}} = 0,$$

wobei $\bar{f}_0(t) = 1$ und allgemein

$$\bar{f}_{\lambda}(t) = \sum_0^{\lambda}{}^{\nu} k^{\nu} \gamma_{n-\nu,\,n-\lambda} f_{\nu} t^{\nu k-\lambda} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots n) \text{ gesetzt ist.}$$

Hieraus ist zu entnehmen, daß der Punkt $t = 0$ jedenfalls ein singulärer Punkt der Differentialgleichung $\bar{D}_t(u) = 0$ sein wird, es sei denn, daß zwischen den ersten Koeffizienten der Reihenentwicklungen der f_{ν} ganz bestimmte Bedingungsgleichungen erfüllt sind, die uns später beschäftigen werden. Zunächst wollen wir lediglich die Bedingung dafür aufstellen, daß er eine Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung $\bar{D}_t(u) = 0$ ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Funktionen $\bar{f}_{\lambda}(t)$ im Punkt $t = 0$ mindestens die Ordnungszahl $-\lambda$ besitzen. Diese Bedingung ist offenbar dann erfüllt, wenn die Funktionen f_{ν} in a mindestens die Ordnungszahl $-\nu k$ besitzen; aber auch nur dann; denn, angenommen, die Ordnungszahl von $\bar{f}_{\lambda}(t)$ sei $\geqq -\lambda$. Die Ordnungszahl von f_{ν} sei mit N_{ν} bezeichnet. Dann ist zunächst

$$\overline{f}_1(t) = \gamma_{n,\,n-1}\, t^{-1} + k\, t^{k-1} f_1, \text{ also}$$

$$f_1 = \frac{1}{k}\,(t^{-(k-1)}\,\overline{f}_1(t) - \gamma_{n,\,n-1}\, t^{-k}), \text{ also}$$

$$N_1 \geqq -k.$$

Ist daher schon gezeigt, daß $N_\nu \geqq -\nu k$ für $\nu = 1, 2, \ldots \lambda - 1$ (was für $\lambda = 2$ der Fall ist), so folgt aus

$$f_\lambda = \frac{1}{k^\lambda}\,(t^{-\lambda\,(k-1)}\,\overline{f}_\lambda(t) - \sum_0^{\lambda-1} k^\nu\, \gamma_{n-\nu,\,n-\lambda}\, t^{(\nu-\lambda)\,k}\, f_\nu)$$

daß auch $N_\lambda \geqq -\lambda k$; denn die einzelnen Summenglieder rechts haben sämtlich mindestens diese Ordnungszahl, also kann auch die Summe jedenfalls keine geringere aufweisen. Wir wollen jetzt eine Stelle der Bestimmtheit $t = 0$ der Differentialgleichung $\overline{D}_t(u) = 0$ auch als eine solche für $D(u) = 0$ bezeichnen. Die notwendige und hinreichende Bedingung für eine solche besteht also darin, daß die f_ν höchstens Pole νkter Ordnung an der Stelle $\mathfrak{a}$ besitzen, und diese Formulierung bleibt auch noch für $k = 1$ richtig.

§ 4.

Reguläre Integrale an einem Verzweigungspunkt, insbesondere Fall, daß alle Koeffizienten f_ν regulär sind.

Man sieht aus den Formeln S. 17 leicht, daß gerade dann, wenn die f_ν in $\mathfrak{a}$ regulär sind (im Sinne der Riemannschen Fläche), die Differentialgleichung $\overline{D}_t(u) = 0$ jedenfalls einen singulären Punkt in $t = 0$ besitzt. Denn es wird z. B.

$$\overline{f}_1(t) = \frac{\gamma_{n,\,n-1}}{t} + k\, t^{k-1} f_1$$

und diese Funktion hat wegen $\gamma_{n,\,n-1} = -(k-1)\binom{n}{2} \neq 0\ (k > 1)$ einen Pol 1. Ordnung. Gleichwohl sind aber alle Integrale in $\mathfrak{a}$ regulär und sie besitzen sogar noch $n-1$ reguläre Ableitungen nach x. Es gilt nämlich folgender noch etwas allgemeinerer Satz: Sind die Ordnungszahlen $N_\nu \geqq -(k-1)$, so existiert in der Umgebung von $\mathfrak{a}$ ein Fundamentalsystem der Form

$$u_\nu = \frac{(x-a)^\nu}{\nu!} + \sum_1^\infty D_{\nu\lambda}(x-a)^{n-1+\frac{\lambda}{k}} \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots n-1).$$

Zum Beweis gehen wir zu einem System linearer Differentialgleichungen über, indem wir setzen:

$$u = u^{(0)}; \quad \frac{du}{dx} = u^{(1)}; \quad \frac{d^2u}{dx^2} = u^{(2)}; \quad \ldots \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = u^{(n-1)}.$$

Hierdurch erhält man das Differentialsystem

$$\frac{du^{(0)}}{dt} = k t^{k-1} u^{(1)}$$

$$\frac{du^{(1)}}{dt} = k t^{k-1} u^{(2)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{du^{(n-2)}}{dt} = k t^{k-1} u^{(n-1)}$$

$$\frac{du^{(n-1)}}{dt} = -k t^{k-1} \sum_0^{n-1} f_{n-\nu} u^{(\nu)}.$$

Hier sind jetzt aber die Koeffizientent sämtlich regulär an der Stelle $t = 0$, und daher gibt es nach dem Existenzsatz für Systeme genau ein Integralsystem $u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots u^{(n-1)}$ von gewöhnlichen Potenzreihen nach t, welche für $t = 0$ die Werte $u^{(0)}(0), u^{(1)}(0), \ldots u^{(n-1)}(0)$ annehmen, die beliebig vorgeschrieben werden können. Insbesondere kann man also eine Integralmatrix $\left(u_\nu^{(\mu)}\right)$ finden, die sich für $t = 0$ auf

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \text{ reduziert.}$$

Geht man nun wieder auf die Fläche $\mathfrak{R}$ zurück, so gelangt man zu einem System von Integralen u_ν $(\nu = 0, \ldots n-1)$, für welches die Determinante $\left|\frac{d^\mu u_\nu}{dx^\mu}\right|_a$ $(\mu = 0, 1, \ldots n-1)$ den Wert 1 hat, welches also ein Fundamentalsystem ist, und zwar ist

$$u_\nu = \frac{(x-a)^\nu}{\nu!} + \sum_1^\infty D_{\nu\lambda}(x-a)^{n-1+\frac{\lambda}{k}}.$$

Denn träte hier auch nur eine einzige Potenz $x^{\frac{\sigma}{k}}$ (σ nicht durch k teilbar) mit $0 < \sigma < (n-1)k$ auf, so wäre mindestens eine der $n-1$ ersten Ableitungen in a nicht regulär; sollte aber in u_ν eine Potenz x^ϱ mit ganzzahligem ϱ auftreten für $0 \leqq \varrho \leqq n-1$ und $\varrho \neq \nu$, so wäre ja $\left(\frac{d^\varrho u_\nu}{dx^\varrho}\right)_a \neq 0$, gegen die Annahme, daß das Integral u_ν gerade der νten Zeile der Matrix E entsprechen sollte. Für $N_\nu \geqq 0$ folgt hieraus speziell der bei Schlesinger, Handb. I S. 212 ff. weniger einfach direkt aus der Differentialgleichung ohne Zurückgehen auf das System hergeleitete Satz. In diesem besonderen Falle, wo also alle f_ν in a regulär sind, sind auch noch sämtliche

$$D_{\nu\lambda} = 0 \text{ für } \lambda = 1, 2, \ldots k-1.$$

Denn wäre das nicht der Fall, so wäre die $n$te Ableitung des betreffenden Integrals in a nicht regulär, was der Differentialgleichung widerspricht, aus der sich ja dann $\frac{d^n u}{dx^n}$ als in a reguläre Funktion berechnet, weil alle f_ν ($\nu = 0, 1, \ldots n$) und $u^{(\nu)}$ ($\nu = 0, 1, \ldots n-1$) regulär sind.

Als einfaches Beispiel zu diesem Satze sei die Differentialgleichung

$$x^{\frac{h}{k}} \frac{d^n u}{dx^n} = cu$$

betrachtet, wo h, k natürliche Zahlen bedeuten, $k \geqq 2$ $1 \leqq h \leqq k-1$; $c\,(\neq 0)$ beliebig konstant. Setzt man $x = ax'$ und wählt a so, daß $k^{-n} a^{\frac{h}{k}-n} = c$, so geht sie in die folgende Differentialgleichung über (in der wieder x statt x' geschrieben ist):

$$k^n x^{\frac{h}{k}} \frac{d^n u}{dx^n} = u.$$

Natürlich könnte man sie vermöge $x = t^k$ nicht nur lokal uniformisieren, sondern überhaupt eine Differentialgleichung mit

rationalem Koeffizienten herstellen; allein für die Durchrechnung wäre das weitläufiger als der direkte Ansatz. Wir setzen

$$u_\nu = \frac{x^\nu}{\nu!} + \sum_1^\infty{}^\lambda D_{\nu\lambda}\, x^{n-1+\frac{\lambda}{k}} \quad \text{für } \nu = 0, 1, 2, \ldots n-1,$$

so daß wir auf einmal ein ganzes Fundamentalsystem erhalten. Es kommt:

$$\sum_1^\infty{}^\lambda \lambda\,(\lambda+k)\,(\lambda+2k)\ldots(\lambda+(n-1)k)\,D_{\nu\lambda}\,x^{-1+\frac{\lambda+h}{k}}$$

$$= \frac{x^\nu}{\nu!} + \sum_1^\infty{}^\lambda D_{\nu\lambda}\, x^{n-1+\frac{\lambda}{k}}.$$

Hieraus ergibt sich zunächst:

$D_{\nu 1} = D_{\nu 2} = \ldots = D_{\nu,(\nu+1)k-h-1} = 0$; für $\lambda = (\nu+1)k-h$:

$(\nu+1)k-h)\,((\nu+2)k-h)\ldots((\nu+n)k-h)\;D_{\nu,(\nu+1)k-h}$

$= \frac{1}{\nu!}$, sodann $D_{\nu,(\nu+1)k-h+1} = D_{\nu,(\nu+1)k-h+2} = \ldots$

$= D_{\nu,nk-h} = 0$; nunmehr für $\lambda = 1, 2, \ldots$

$(\lambda+nk-h)\,(\lambda+(n+1)k-h)\ldots(\lambda+(2n-1)k-h) \times$

$D_{\nu,\lambda+nk-h} = D_{\nu\lambda}$,

woraus dann allgemein folgt:

$D_{\nu,((\sigma-1)n+\nu+1)k-\sigma h+\mu} = 0$ für $\sigma = 1, 2, 3\ldots$ und

$\mu = 1, 2, \ldots nk-h-1$, dagegen

$$D_{\nu,(\sigma n+\nu+1)k-(\sigma+1)h} = \frac{D_{\nu,((\sigma-1)n+\nu+1)k-\sigma h}}{\prod_1^n{}^\varkappa\,(\sigma n+\nu+\varkappa)k-(\sigma+1)h}$$

$$= \frac{1}{\nu!}\,\frac{1}{\prod_0^\sigma{}^\varrho \prod_1^n{}^\varkappa\,(\varrho n+\nu+\varkappa)k-(\varrho+1)h},$$

so daß schließlich wird

$$u_\nu = \frac{x^\nu}{\nu!}\left\{1 + \sum_1^\infty{}^\sigma \frac{x^{\sigma\left(n-\frac{h}{k}\right)}}{\prod_0^\sigma{}^\varrho \prod_1^n{}^\varkappa\,(\varrho n+\nu+\varkappa)k-(\varrho+1)h}\right\}.$$

Alle Reihen sind natürlich beständig konvergent.

Betrachten wir als allgemeinere Anwendung die im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots \mathfrak{q}_{L'}$ von $\mathfrak{R}$; sind dann die f_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ sämtlich Funktionen des Ideals $\mathfrak{J}\left(\mathfrak{q}_1^{-(k_1-1)}\mathfrak{q}_2^{-(k_2-1)} \ldots \mathfrak{q}_{L'}^{-(k_{L'}-1)}\right)$ (welches, falls alle unendlich fernen Punkte schlicht sind, mit dem Verzweigungsideal übereinstimmt), so sind also sämtliche Integrale in jedem endlichen Punkte regulär. Hieraus folgt natürlich nur für $p = 0$, daß sie auf $\mathfrak{R}$ eindeutig sind; denn für den Monodromiesatz, der aus der Fortsetzbarkeit nach jedem Punkte eines Bereichs auf die Eindeutigkeit in diesem schließen läßt, ist ja die Voraussetzung des einfachen Zusammenhangs wesentlich.

§ 5.

Regularität der Koeffizienten der transformierten Differentialgleichung am Verzweigungspunkt.

Wir haben gesehen, daß bei regulären Koeffizienten zwar $\overline{D}_t(u) = 0$ einen singulären Punkt erhält, aber doch so, daß alle Integrale regulär sind. Es kann andererseits sehr wohl sein, daß die Koeffizienten von $D(u) = 0$ singuläre Punkte haben, während $\overline{D}_t(u) = 0$ reguläre Koeffizienten enthält, so daß für die Integrale wieder Regularität folgt. Wir wollen die Bedingungen hierfür aufstellen.

Es war $\overline{f}_\lambda(t) = \sum_0^\lambda k^\nu \gamma_{n-\nu, n-\lambda} t^{\nu k - \lambda} f_\nu$ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$. Nun ist jedenfalls notwendig, daß α eine Stelle der Bestimmtheit sei; wir können also annehmen (mit $\alpha_{00} = 1$; $\alpha_{0\varkappa} = 0$ f. $\varkappa \neq 0$)

$$f_\nu = \sum_0^\infty \alpha_{\nu\varkappa} t^{-\nu k + \varkappa}, \text{ so daß man erhält}$$

$$\overline{f}_\lambda(t) = \sum_0^\lambda k^\nu \gamma_{n-\nu, n-\lambda} \sum_0^\infty \alpha_{\nu\varkappa} t^{\varkappa - \lambda} = \sum_0^\infty \sum_0^\lambda k^\nu \gamma_{n-\nu, n-\lambda} \alpha_{\nu\varkappa} t^{\varkappa - \lambda}.$$

Dann und nur dann sind alle $\overline{f}_\lambda(t)$ in $t = 0$ regulär, wenn der Koeffizient von $t^{\varkappa - \lambda}$ für $\varkappa < \lambda$ stets verschwindet. Das gibt, wenn wir das für jeweils festes $\lambda = 1, 2, \ldots n$ bei veränder-

lichem $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots \lambda - 1$ entstehende System umgekehrt nach $\varkappa$ anordnen:

$$\text{I.} \begin{cases} \text{für } \varkappa = 0 \quad \sum_{1}^{\lambda} k^{\nu} \gamma_{n-\nu,\, n-\lambda}\, a_{\nu 0} + \gamma_{n,\, n-\lambda} = 0 \quad \text{und} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n) \\ \text{für } \varkappa = 1, 2, \ldots n-1 \end{cases}$$

$$\sum_{1}^{\lambda} k^{\nu} \gamma_{n-\nu,\, n-\lambda}\, a_{\nu \varkappa} = 0 \quad (\lambda = \varkappa + 1, \varkappa + 2, \ldots n).$$

Dies sind $n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen für die n^2 Unbekannten $a_{\nu\varkappa} \begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1, 2, \ldots n-1 \\ \nu = 1, 2, \ldots\ldots\ n \end{pmatrix}$, so daß voraussichtlich $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ derselben willkürlich bleiben.

Dies ist in der Tat richtig, denn zunächst erhält man aus den n Gleichungen für $\varkappa = 0$ ersichtlich der Reihe nach die $a_{\lambda 0}$; für $\varkappa = 1$ bleibt a_{11} beliebig und bestimmen sich $a_{21}, a_{31} \ldots a_{n1}$ eindeutig. Allgemein bleibt jeweils für ein beliebiges $\varkappa$ $a_{1\varkappa}$, $a_{2\varkappa}, \ldots a_{\varkappa\varkappa}$ willkürlich und bestimmen sich aus den für $\lambda = \varkappa + 1$, $\varkappa + 2, \ldots n$ entstehenden $n - \varkappa$ Gleichungen

$$a_{\varkappa+1,\varkappa};\ a_{\varkappa+2,\varkappa};\ \ldots\ a_{n\varkappa}.$$

Sonach kann man in dem Schema

$$\begin{array}{llll} a_{10} & \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \ldots\ \underline{a_{1,n-1}} \\ a_{20} & a_{21} & \underline{a_{22}} & \ldots\ \underline{a_{2,n-1}} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & \ldots\ \underline{a_{3,n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots\ \underline{a_{n-1,n-1}} \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & a_{n,n-1} \end{array}$$

$\binom{n}{2}$ Größen, nämlich die rechts oberhalb der Hauptdiagonale stehenden unterstrichenen, beliebig annehmen, wofern die $a_{\nu\varkappa}$ als Veränderliche angesehen werden, die nur den Gleichungen I genügen müssen. Die übrigen sind hierdurch bestimmt. In den Anwendungen (z. B. wenn aus einer linearen Schar algebraischer

Funktionen diejenigen herauszusuchen sind, welche den Gleichungen dieses Paragraphen genügen) werden jedoch die $\alpha_{\nu\varkappa}$ lineare Funktionen gewisser Parameter sein. Es ist dann keine Gewähr dafür, daß es durch Wahl dieser unabhängigen Parameter überhaupt gelingt, die Gleichungen zu erfüllen; dieselben müssen dann direkt untersucht werden.

§ 6.

Die Differentialgleichung an einem unendlich fernen Punkt.

Wir haben die Ergebnisse der letzten Abschnitte noch auf unendlich ferne Punkte von $\mathfrak{R}$ zu übertragen. Es sei also u ein $k$blättriger unendlich ferner Punkt. Dann ist in den Betrachtungen von § 3 einfach k durch $-k$ zu ersetzen. Das Äußere eines hinreichend großen, $k$fach gewundenen Kreises (= Umgebung des ∞ fernen Punktes) wird hier durch $x = \frac{1}{t^k}$ auf ein schlichtes Kreisinneres der t-Ebene abgebildet.

Wir nennen u wieder Stelle der Bestimmtheit, wenn $t = 0$ es für die transformierte Differentialgleichung $\overline{D}_t(u) = 0$ ist. So erhält man als notwendige und hinreichende Bedingung die folgende: f_ν soll in u mindestens die Ordnungszahl νk aufweisen oder, was dasselbe ist: f_ν soll dort eine Nullstelle mindestens der Ordnung νk besitzen.

Ferner sind die Bedingungen des § 5 für die Regularität von $\overline{D}_t(u) = 0$ ohne weiteres übertragbar, wenn wir nur überall $-k$ statt k schreiben. Dagegen wird sich das Analogon zu § 4 etwas anders gestalten. Wir haben nämlich hier $x = \frac{1}{x'}$ zu setzen und fragen, wann sich die Koeffizienten der transformierten Differentialgleichung $\overline{D}_{x'}(u) = 0$ f. $x' = 0$, wo jetzt ein $k$blättriger Verzweigungspunkt a' liegt, regulär verhalten bzw. höchstens die Ordnung $-(k-1)$ besitzen. In beiden Fällen gibt es dann ein Fundamentalsystem von n in u regulären Integralen, deren Entwicklungen die Form haben:

$$u_\nu = \frac{x^{-\nu}}{\nu!} + \sum_1^\infty D_{\nu\lambda}\, x^{-(n-1)-\frac{\lambda}{k}} \quad (\nu = 0, 1, \ldots n-1)$$

Es sei in der Umgebung von u

$$f_\nu = \sum_0^\infty{}_\varkappa\, \beta_{\nu\varkappa}\, x^{-\nu-\frac{\varkappa}{k}} = \sum_0^\infty{}_\varkappa\, \beta_{\nu\varkappa}\, x'^{\nu+\frac{\varkappa}{k}}$$

Dann ist

$$\overline{f}_\lambda(x') = \sum_0^\lambda{}_\nu\, \delta_{n-\nu,\,n-\lambda} \sum_0^\infty{}_\varkappa\, \beta_{\nu\varkappa}\, x'^{\frac{\varkappa}{k}-\lambda} \qquad \left(\delta_{\nu\lambda} = (-1^\nu)\,(\gamma_{\nu\lambda})_{k=1}\right)$$

$$= \sum_0^\infty{}_\varkappa \sum_0^\lambda{}_\nu\, \delta_{n-\nu,n-\lambda}\, \beta_{\nu\varkappa}\, x'^{\frac{\varkappa}{k}-\lambda}$$

und daraus ergeben sich für die $k\,n^2$ Unbekannten $\beta_{\nu\varkappa}$

$$\begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots n \\ \varkappa = 0, 1, \ldots nk-1 \end{pmatrix}$$

1. wenn alle $\overline{f}_\lambda(x')$ in α' regulär sein sollen, die Bedingungsgleichungen (mit $\beta_{00} = 1$, $\beta_{0\varkappa} = 0$)

II. $$\sum_0^\lambda{}_\nu\, \delta_{n-\nu,\,n-\lambda}\, \beta_{\nu\varkappa} = 0,$$ und zwar für

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa = \sigma k,\ \sigma k+1,\ \ldots\ (\sigma+1)k-1 \\ \lambda = \sigma+1,\ \sigma+2\ \ldots\ n \end{array}\right\} \quad \sigma = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Man sieht entsprechend wie oben, daß hier die $k\,\dfrac{n(n-1)}{2}$ Unbekannten $\beta_{\nu\varkappa}$ für $0 < \nu \leqq \sigma$ willkürlich bleiben, während die übrigen dann bestimmt sind.

2. Sollen dagegen die $\overline{f}_\lambda(x')$ in α' höchstens die Ordnungszahl $-(k-1)$ besitzen, so werden die Bedingungen folgende:

III. $$\sum_0^\lambda{}_\nu\, \delta_{n-\nu,\,n-\lambda}\, \beta_{\nu\varkappa} = 0$$ für

$$\varkappa = 0;\ \lambda = 1, 2, \ldots n \text{ und für}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa = \sigma k+1,\ \sigma k+2,\ \ldots\ (\sigma+1)k \\ \lambda = \sigma+2,\ \sigma+3,\ \ldots\ n \end{array}\right\} \quad \sigma = 0, 1, 2, \ldots n-2.$$

Dies sind $n + k\,\dfrac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen; es können diejenigen von

den kn^2 Unbekannten willkürlich gewählt werden, für die im obigen Schema $0 < \nu \leqq \sigma + 1$ (f. $\sigma = 0, 1, 2, \ldots n-2$) sowie

$$\beta_{\nu\varkappa} \text{ f. } \varkappa = (n-1)k + 1;\ (n-1)k + 2;\ \ldots\ (nk-1).$$

Bezüglich der Anwendbarkeit dieser Bedingungen gilt eine entsprechende Bemerkung wie oben.

§ 7.

Reguläre und singuläre Punkte der Differentialgleichung; die Fuchssche Klasse des Körpers.

Wir sind nunmehr in der Lage, endgültige Bezeichnungen für die Stellen unserer Differentialgleichung einzuführen.

1. Regulär heißt a) jede endliche Stelle α von $\mathfrak{R}$, an der sämtliche Koeffizienten f_ν reguläre Funktionen auf der Fläche sind; b) jeder ∞ ferne Punkt, der vermöge $x = \frac{1}{x'}$ in einen regulären Punkt der Differentialgleichung $\overline{D}_{x'}(u) = 0$ übergeht. Die Entwicklungskoeffizienten im Unendlichen müssen hierzu den $k\frac{n(n+1)}{2}$ Bedingungen II S. 25 genügen ($k \geqq 1$).

Dann gilt nach dem Vorhergehenden, daß an einer regulären Stelle alle Integrale mit ihren n ersten Ableitungen regulär sind, und daß es ein Fundamentalsystem mit den Ordnungszahlen

$$0;\ k;\ 2k;\ \ldots\ (n-1)k \text{ gibt.}$$

2. Singulär heißt jede andere Stelle, d. h. also jeder endliche Punkt, an dem mindestens einer der Koeffizienten f_ν singulär ist und jeder unendlich ferne, der vermöge $x = \frac{1}{x'}$ in einen solchen übergeht.

Insbesondere bieten sich hier dar

a) uneigentlich singuläre Punkte 1. Art definiert durch die Eigenschaft, daß alle f_ν höchstens Pole $(k-1)$ter Ordnung haben; hier sind alle Integrale nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen regulär, und es gibt ein Fundamentalsystem mit den Ordnungszahlen

$$0;\ k;\ 2k;\ \ldots\ (n-1)k.$$

Im Unendlichen treten hier die Bedingungen III S. 25 ein.

b) Uneigentlich singuläre Punkte 2. Art, definiert durch die Eigenschaft, daß alle Koeffizienten der transformierten Differentialgleichung $\overline{D}_t(u) = 0$ regulär sind (x bzw. $\frac{1}{x} = t^k$; $k \geqq 2$).

In der Tat muß ein solcher Punkt nach früherem für $D(u) = 0$ ein singulärer sein (§ 4 S. 18). Hier sind alle Integrale regulär, und es gibt ein Fundamentalsystem mit den Ordnungszahlen

$$0; 1; 2; \ldots n-1.$$

Hierfür gelten die Bedingungen I S. 23, im Unendlichen mit Ersetzung von k durch $-k$.

Aus den Ordnungszahlen folgt, daß für $n > 1$ niemals ein Punkt gleichzeitig uneigentlich singulär 1. und 2. Art sein kann. Für $n = 1$ dagegen fallen offenbar beide Begriffe zusammen.

Man sieht leicht, daß, falls ein Fundamentalsystem mit den Ordnungszahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ vorhanden ist, ein regulärer oder uneigentlich singulärer Punkt 2. Art vorliegt, und zwar je nachdem es sich um einen schlichten oder $k$blättrigen Punkt von $\mathfrak{R}$ handelt. Das ist nämlich nur die unmittelbare Anwendung eines bekannten Satzes (Heffter S. 61/62) auf $D(u) = 0$ am schlichten Punkte a bzw. auf $\overline{D}_t(u) = 0$ an einem Verzweigungspunkt.

Weiterhin gilt: Gibt es in dem endlichen Punkt a ein Fundamentalsystem mit den Ordnungszahlen

$$0, k, 2k, \ldots (n-1)k,$$

so ist a jedenfalls dann ein regulärer oder uneigentlich singulärer Punkt 1. Art, wenn noch weiter angenommen wird, daß auch die $n-1$ ersten Ableitungen regulär sind.

Denn es ist dann

$$u_\nu = \frac{x^\nu}{\nu!} + \sum_1^\infty{}^{\lambda} D_{\nu\lambda}\, x^{n-1+\frac{\lambda}{k}} \quad (\text{f. } a = 0)$$

anzusetzen, und es wird $\frac{d^\varkappa u_\nu}{dx^\varkappa}$ regulär für $\varkappa = 1, 2, \ldots n-1$ und

höchstens von der Ordnung $k-1$ ∞ für $\varkappa = n$. Nun ist die Differentialgleichung aber bekanntlich

$$\text{Det.} \begin{vmatrix} u^{(n)} & u^{(n-1)} & \dots & u' & u \\ u_\nu^{(n)} & u_\nu^{(n-1)} & \dots & u'_\nu & u_\nu \end{vmatrix} = 0, \text{ und}$$

hier sind die Koeffizienten höchstens mit Polen $(k-1)$ter Ordnung behaftet, der Faktor von $u^{(n)}$ aber regulär und von Null verschieden, also haben alle f_ν mindestens die Ordnungszahl $-(k-1)$, wie behauptet.

c) Es ist durchaus möglich, daß noch in anderen Fällen die Integrale sämtlich regulär sind. Ein solcher Punkt heiße Nebenpunkt der Differentialgleichung. An einem solchen gibt es jedenfalls kein System mit Ordnungszahlen $0, 1, 2, \dots (n-1)$. Es kann aber (für $k \geqq 2$) allerdings ein Fundamentalsystem mit den Ordnungszahlen

$$0, k, \dots (n-1)k$$

geben; denken wir uns den Punkt ins Endliche gebracht, dann ist aber nach dem vorhergehenden Satz mindestens eine der Ableitungen $\frac{d^\varkappa u_\nu}{d x^\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \dots n-1)$ im betreffenden Flächenpunkte singulär, denn sonst läge einer der vorher als uneigentlich singulär erster Art bezeichneten Punkte vor.

Die bisher herausgegriffenen Sonderfälle singulärer Punkte sind singuläre Stellen der Bestimmtheit. Allgemein liegt eine Stelle der Bestimmtheit dann und nur dann vor, wenn alle f_ν an einem endlichen Punkte mindestens die Ordnung $-\nu k$ bezw. an einem unendlich fernen Punkt mindestens die Ordnung νk besitzen, und zwar eine singuläre, wenn mindestens eine der Funktionen einen Pol hat bezw. im Unendlichen die Bedingungen I S. 23 nicht erfüllt sind. Hier überträgt sich nun die gewöhnliche Theorie der Stellen der Bestimmtheit vermöge der Differentialgleichung $\overline{D}_t(u) = 0$ vollständig, auf die wir also nicht näher einzugehen haben: Man bilde die determinierende Fundamentalgleichung $f_0(r) = 0$ [1]) und die Rekursionsformel mittels des An-

[1]) vgl. Anm. S. 58.

satzes $u = \sum_0^\infty D_\nu t^{r+\nu}$. Zu jeder l_0-fachen Wurzel r_0 von $f_0(r) = 0$, zu der keine Wurzel $r_0 + \gamma$ existiert ($\gamma = 1, 2, \ldots$) gibt es dann gewiß ein Integral der Form $u = x^{\frac{r_0}{k}} \sum_0^\infty D_\nu x^{\frac{\nu}{k}}$ und man findet die zu einer Gruppe von je l_λ-fachen Wurzeln r_λ, für die $r_0 - r_\lambda$ eine natürliche Zahl ist, gehörigen Integrale nach Frobenius in bekannter Weise durch fortgesetzte Differentiation der Reihe $x^{\frac{r}{k}} \sum_0^\infty D_\nu(r) x^{\frac{r}{k}}$ nach r und nachheriges Einsetzen von $r = r_0$. (Dabei ist $D_0(r)$ als Funktion von r passend zu wählen.) Es gehören zu einer l_λ-fachen Wurzel r_λ stets genau l_λ unter sich linear unabhängige Integrale und man erhält zu den n-Wurzeln von $f_0(r) = 0$ auch n insgesamt linear unabhängige. Die endgültigen Berechnungsregeln sind wohl am übersichtlichsten bei Horn S. 162 zusammengestellt. (Zum Vergleich mit S. 15 ist zu bemerken, daß einer Gruppe von Wurzeln $r_0, r_1, \ldots r_s$ mit den Vielfachheiten $l_0, l_1, \ldots l_s$ und mit $r_0 - r_\lambda = \text{ganz} > 0$ eine $l_0 + l_1 + \ldots l_s$-fache Wurzel ω der Umlaufsgleichung entspricht.) Ferner ist klar, daß die determinierende Gleichung statt durch Einsetzen von $u = \sum_0^\infty D_\nu t^{r+\nu}$ in die Gleichung $D_t(u) = 0$ auch durch direkten Ansatz $u = \sum_0^\infty D_\nu x^{\frac{r+\nu}{k}}$ aus der Gleichung $D(u) = 0$ zu gewinnen ist, wo im Falle eines unendlich fernen Punktes wieder k durch $-k$ zu ersetzen ist. (Wir schließen uns damit betreffs der determinierenden Gleichung im Unendlichen an Fuchs, nicht an Heffter an.)

Alle anderen Punkte der Differentialgleichung heißen singuläre Punkte der Unbestimmtheit. Hier besitzen die Integrale die Form S. 15, wo nur t statt $x - a$ zu schreiben ist.

Soweit sich die bisherigen Betrachtungen auf eine einzelne Stelle der Fläche $\mathfrak{R}$ bezogen, bleiben sie offenbar im wesentlichen gültig, wenn wir nicht nur Funktionen des Körpers $\mathfrak{R}(x, y)$ als Koeffizienten zulassen, sondern nur verlangen, daß sich alle f_ν an der betrachteten Stelle der x-Ebene algebroid verhalten —,

denn man braucht ja nur k als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches der Verzweigungszahlen der f_ν zu wählen. Fordern wir jetzt, bei vorgegebener Fläche $\mathfrak{R}$, daß unsere Differentialgleichung dort eindeutige Koeffizienten und nur singuläre Punkte der Bestimmtheit hat! Dann können die f_ν höchstens Pole auf $\mathfrak{R}$ besitzen und müssen also von selbst dem Körper $\mathfrak{K}(x, y)$ angehören; die Gesamtheit aller so erhaltenen Differentialgleichungen nennen wir die Fuchssche Klasse des Körpers $\mathfrak{K}(x, y)$.

Wir fragen nunmehr nach allen Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse, die im Endlichen die σ singulären Stellen der Bestimmtheit $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\sigma$ haben und für welche die τ verschiedenen unendlich fernen Punkte $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2 \ldots \mathfrak{u}_\tau (\tau \leqq m)$ ebenfalls sämtlich Stellen der Bestimmtheit sind. (Streng genommen müßten wir von den „eventuell-singulären" Punkten sprechen, da wir den Fall nicht ausschließen wollen, daß z. B. durch spezielle Wahl der etwa noch willkürlichen Konstanten auch diese Punkte zum Teil regulär werden; man kann sich sogar leicht an Beispielen überzeugen, daß bei gewissen Auswahlen der $\mathfrak{p}_\lambda$ von selbst einige regulär werden müssen[1]). Aber es scheint auch bei Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten hier üblich zu sein, von den singulären Stellen zu reden, auch wenn die Wahl der Parameter es noch freistellt, sie in reguläre zu verwandeln, woran wir uns anschließen wollen.)

Falls nun f_ν nicht identisch verschwindet, so entspricht ihm ein bestimmter Divisor $\mathfrak{D}_\nu$. Dann ist offenbar zu fordern, daß $\mathfrak{D}_\nu$ sowohl durch $\mathfrak{p}_\lambda^{-\nu k_\lambda} (\lambda = 1, 2, \ldots \sigma)$ als durch $\mathfrak{u}_\lambda^{k_{+\lambda}} (\lambda = 1, 2 \ldots \tau)$ teilbar sei, wenn k_λ die Blätterzahl in $\mathfrak{p}_\lambda$, $k_{+\lambda}$ diejenige in $\mathfrak{u}_\lambda$ bezeichnet. Dann und nur dann ist also $D(u) = 0$ eine Differentialgleichung der Fuchsschen Flasse des Körpers $\mathfrak{K}$, wenn man hat (für $f_\nu \not\equiv 0$)

$$\mathfrak{D}_\nu = \prod_{1}^{\sigma_\lambda} \mathfrak{p}_\lambda^{-\nu k_\lambda} \prod_{1}^{\tau_\lambda} \mathfrak{u}_\lambda^{\nu k_\sigma + \lambda} \cdot \mathfrak{G}_\nu,$$

[1]) vgl. Satz S. 31.

wo $\mathfrak{G}_\nu$ einen (absolut, nicht nur in bezug auf die unabhängige Veränderliche x im Sinne von Jung S. 100) ganzen Divisor bedeutet. Ziehen wir hieraus einen einfachen Schluß! Die Ordnung g_ν des Divisors $\mathfrak{G}_\nu$ ist ≥ 0, die Ordnung von $\mathfrak{D}_\nu$ ist Null, da er der Hauptklasse angehört (einer Funktion des Körpers entspricht). Es ist also, sofern wenigstens eine der Funktionen $f_\nu \not\equiv 0$, für ein solches ν

$$-\nu \sum_1^\sigma{}_\lambda k_\lambda + \nu \sum_1^\tau{}_\lambda k_{\sigma+\lambda} + g_\nu = 0,$$

somit

$$-\nu \sum_1^\sigma{}_\lambda k_\lambda + \nu \sum_1^\tau{}_\lambda k_{\sigma+\lambda} \leqq 0,$$

oder

$$\sum_1^\sigma{}_\lambda k_\lambda \geqq \sum_1^\tau{}_\lambda k_{\sigma+\lambda} = m, \text{ d. h.:}$$

Die Summe der Blätterzahlen in den endlichen singulären Punkten ist mindestens gleich dem Grad des Körpers in bezug auf x. Ist insbesondere

$k_\lambda = 1$ f. $\lambda = 1, \ldots \sigma$, so folgt:

Sind alle singulären Punkte im Endlichen schlichte Punkte der Fläche, so müssen mindestens so viele auftreten, als die Blätterzahl der Fläche (über der x-Ebene) beträgt.

So gibt es z. B. im $\mathfrak{R}(x, y)$, wo $y^2 = x^2 + 1$, keine Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse, die im Endlichen nur einen einzigen einblättrigen singulären Punkt hätte. Dies widerspricht keineswegs der Tatsache, daß $\mathfrak{R}(x, y)$ (ein rationaler Körper) identisch ist mit $\mathfrak{R}(\xi)$, wenn man setzt $\xi = x + y$, und daß es in $\mathfrak{R}(\xi)$ sehr wohl Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse gibt, die im Endlichen nur einen singulären Punkt $\xi = a$ haben, nämlich die Differentialgleichungen $\sum_0^n{}_\nu a_\nu (\xi - a)^\nu \frac{d^{n-\nu} u}{d\xi^{n-\nu}}$ wo die a_ν Konstante sind. Denn die Differentialgleichung $\frac{du}{d\xi} = \frac{u}{\xi}$ z. B. geht bei Einführung von x, y wegen $\frac{d\xi}{dx} = 1 + \frac{x}{y}$

über in $\frac{du}{dx} = \frac{u}{y} = \frac{u}{\sqrt{1+x^2}}$ mit den uneigentlich singulären Punkten $\begin{cases} x = \pm i \\ y = 0 \end{cases}$. (Die beiden singulären Punkte sind übergegangen in die beiden unendlich fernen Punkte der Fläche $\mathfrak{R}_x$; einer ist ein Nebenpunkt, wie das Integral $n = C\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ zeigt, im andern hat es einen Pol erster Ordnung.) Wir erkennen aus dieser Betrachtung die wesentliche Rolle, die die Wahl der unabhängigen Veränderlichen x spielt, über deren Ebene die Fläche $\mathfrak{R}$ ausgebreitet ist; wir bezeichnen daher die Fläche von nun an, wo es notwendig erscheint, mit $\mathfrak{R}_x$, um die unabhängige Veränderliche hervortreten zu lassen.

§ 8.

Beispiele.

Wir wollen im $\mathfrak{R}\left(x, \sqrt{x^2+1}\right)$ alle Differentialgleichungen $n$ter Ordnung aufstellen, die im Endlichen nur 2 schlichtblättrige singuläre Punkte besitzen. Wir sahen schon, daß dies jedenfalls die geringstmögliche Anzahl ist, die man sich überhaupt vorgeben darf, wenn man nur schlichte singuläre Punkte haben will. Es sei zunächst $n = 1$. Die Differentialgleichung lautet dann $\frac{du}{dx} = fu$. Sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ die beiden Flächenpunkte, $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ die unendlich fernen Punkte, so hat man offenbar alle Funktionen aufzusuchen, die in $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ höchstens Pole erster Ordnung haben und in den unendlich fernen Punkten mindestens erster Ordnung verschwinden. Sollten zunächst $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ auf $\mathfrak{R}$ übereinanderliegen, also zum nämlichen x-Wert a gehören, so wäre $(x-a)f$ in $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$, ferner in $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ und sonst überall auf $\mathfrak{R}$ regulär, also eine Konstante A, also $f = \frac{A}{x-a}$, d. h. ein trivialer Fall aus $\mathfrak{R}(x)$ liegt vor. Es sei also:

$$\mathfrak{p}_1 \begin{cases} x = a \\ y = \sqrt{a^2+1} \end{cases}; \quad \mathfrak{p}_2 \begin{cases} x = b \\ y = \sqrt{b^2+1} \end{cases} \begin{pmatrix} a \neq b \\ a \neq \pm i \\ b \neq \pm i \end{pmatrix};$$

es dürfen beide Punkte im gleichen Blatt angenommen werden, da man den Verzweigungsschnitt stets so wählen kann, daß dies der Fall ist. Die Werte $\sqrt{a^2+1}$; $\sqrt{b^2+1}$ sollen also dann dem gleichen Funktionszweig angehören.

Wie jede Funktion des Körpers ist f von der Form $Q(x)+\sqrt{x^2+1}\,R(x)$, wo $Q(x), R(x)$ rationale Funktionen sind; die beiden Zweige sind

$$f_1 = Q(x) + \sqrt{x^2+1}\,R(x)$$
$$f_2 = Q(x) - \sqrt{x^2+1}\,R(x).$$

Es muß dann $\frac{f_1+f_2}{2}$ im Unendlichen verschwinden (da f_1, f_2 für sich dort Nullstellen mindestens erster Ordnung haben); ferner ist $Q(x)$ im Endlichen überall regulär, abgesehen von den Punkten a, b, wo Pole höchstens erster Ordnung liegen können; es ist also $Q(x) - \frac{A}{x-a} - \frac{B}{x-b}$, wo A, B passende Konstante, eine im Endlichen überall reguläre, im Unendlichen verschwindende rationale Funktion, also Null, d. h.

$$Q(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

Weiter hat $R(x)$ für $x = a, b$ höchstens Pole erster Ordnung, ist für $x = \pm i$ regulär (da es sonst $Q(x)+\sqrt{x^2+1}\,R(x)$ in den Verzweigungspunkten von $\mathfrak{R}$ offenbar nicht sein könnte) und muß im Unendlichen in zweiter Ordnung verschwinden, so daß

$$R(x) - \frac{A'}{x-a} - \frac{B'}{x-b} \equiv 0, \text{ wo überdies } A'+B' = 0.$$

Somit ist

$$f = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + c\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)\sqrt{x^2+1}.$$

Aus der Regularität in den Punkten $\overline{\mathfrak{p}_1}, \overline{\mathfrak{p}_2}$ unter $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ folgt weiter leicht $A - c\sqrt{a^2+1} = 0$

$$B + c\sqrt{b^2+1} = 0, \text{ somit}$$

$$f = c\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{x-a} - \frac{\sqrt{b^2+1}}{x-b} + \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)\sqrt{x^2+1}\right).$$

Es ist nun

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-a}\,dx = -\sqrt{a^2+1}\,\lg\frac{1+ax+\sqrt{a^2+1}\sqrt{x^2+1}}{x-a} + a\,\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sqrt{x^2+1}+C \text{ und daher}$$

$$\int f\,dx = 2\sqrt{a^2+1}\,\lg(x-a) - 2\sqrt{b^2+1}\,\lg(x-1) + (a-b)\,\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{a^2+1}\,\lg\left(1+ax+\sqrt{a^2+1}\,\sqrt{x^2+1}\right) + \sqrt{b^2+1}\,\lg\left(1+bx+\sqrt{b^2+1}\,\sqrt{x^2+1}\right)+C',$$

also schließlich

$$u = C''\left\{\frac{(x-a)^{2\sqrt{a^2+1}}\left(1+bx+\sqrt{b^2+1}\,\sqrt{x^2+1}\right)^{\sqrt{b^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{a}}{(x-1)^{2\sqrt{b^2+1}}\left(1+ax+\sqrt{a^2+1}\,\sqrt{x^2+1}\right)^{\sqrt{a^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{b}}\right\}^{c}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß jeder Zweig dieser im allgemeinen auf $\mathfrak{R}$ vieldeutigen Funktionen wirklich das geforderte Verhalten an den Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ hat; auch erkennt man z. B. die Regularität an den zu $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ konjugierten Punkten $\overline{\mathfrak{p}_1}$ und $\overline{\mathfrak{p}_2}$, wenn man bemerkt, daß etwa für $\overline{\mathfrak{p}_1}$

$$\left(1+ax-\sqrt{a^2+1}\,\sqrt{x^2+1}\right)^{\sqrt{a^2+1}} = \left\{1+a^2+a(x-a)-(a^2+1)\left(1+a\frac{x-a}{a^2+1}+\frac{(x-a)^2}{2(a^2+1)^2}\right)\cdots\right\}^{\sqrt{a^2+1}} = A\,(x-a)^{2\sqrt{a^2+1}}\left(1+\mathfrak{P}(x-a)\right),$$

wo $A \neq 0$, so daß der Faktor $(x-a)^{2\sqrt{a^2+1}}$ im Zähler und Nenner wegfällt.

Merken wir noch die konstanten Faktoren an, um welche u sich ändert, wenn die singulären Punkte auf $\mathfrak{R}$ umlaufen werden. Es wird für die Wurzeln r_ν der determinierenden Gleichungen [= Residuen für f] an der Stelle

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 : r_1 &= 2c\sqrt{a^2+1} \\ \mathfrak{p}_2 : r_2 &= -2c\sqrt{b^2+1} \\ \mathfrak{u}_1 : r_3 &= c\left(-a-\sqrt{a^2+1}+b+\sqrt{b^2+1}\right) \\ \mathfrak{u}_2 : r_4 &= c\left(a-\sqrt{a^2+1}-b+\sqrt{b^2+1}\right) \end{aligned}\right\},$$

also bezw.

$$\bar{u} = e^{4\pi i c\sqrt{a^2+1}} \cdot u$$
$$\bar{u} = e^{-4\pi i c\sqrt{b^2+1}} \cdot u$$
$$\bar{u} = e^{2\pi i c(-a-\sqrt{a^2+1}+b+\sqrt{b^2+1})} \cdot u$$
$$\bar{u} = e^{2\pi i c(\ a-\sqrt{a^2+1}-b+\sqrt{b^2+1})} \cdot u$$

Dabei ist mit $\bar{u}$ der Wert nach einem positiven Umlauf um den betreffenden Punkt der Fläche bezeichnet. Es ist

$$r_1+r_2+r_3+r_4=0,$$

eine Beziehung, deren Verallgemeinerung wir sehr bald aufstellen werden — hier mit dem Residuensatz für f identisch.

Die Funktion f enthielt nur eine willkürliche Konstante. Es ist infolgedessen hier nicht möglich, wenn die singulären Punkte vorgegeben sind, nun etwa auch noch die Wurzeln der determinierenden Gleichungen willkürlich vorzuschreiben, selbst wenn die vorgegebenen Werte der Relation $\sum_1^4 r_\nu = 0$ genügen.

Natürlich kann man f auch durch Rationalisierung finden; sei etwa

$$x=\frac{1}{2}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)$$
$$y=\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right).$$

Es wird $\xi=x+y$ und daher

für $\mathfrak{p}_1$: $\xi=a+\sqrt{a^2+1}=\alpha$; $\mathfrak{p}_2$: $\xi=b+\sqrt{b^2+1}=\beta$

$\mathfrak{u}_1$: $\xi=0$; $\mathfrak{u}_2$: $\xi=\infty$

f wird damit eine rationale Funktion von ξ, die wegen der Invarianz der Ordnungszahl bei birationaler Transformation im Unendlichen und an der Nullstelle mindestens erster Ordnung verschwindet, für $\xi=\alpha$ und $\xi=\beta$ höchstens Pole erster Ordnung hat, sonst überall regulär ist. Sonach ist

$$f\cdot\frac{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}{\xi}$$

überall regulär, also konstant,

$$f = C_1 \frac{\xi}{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}$$
$$= C_1' \left\{ \frac{\sqrt{a^2+1}}{x-a} - \frac{\sqrt{b^2+1}}{x-b} + \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)\sqrt{x^2+1} \right\}$$

wie oben. — Auf diesem Wege können wir nun auch leicht alle Differentialgleichungen $n$ter Ordnung des Gebildes finden, die nur $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$ zu singulären Stellen haben; denn die „Vielfachen" von $\mathfrak{p}_1^{-1}, \mathfrak{p}_2^{-1}$; $\mathfrak{u}_1^{1}, \mathfrak{u}_2^{1}$ sind rationale Funktionen von ξ, die für $\xi = 0, \infty$ mindestens in νter Ordnung verschwinden, an den Stellen $\xi = \alpha, \beta$ höchstens Pole νter Ordnung haben. Es ist also:

$$f_\nu = C_\nu \frac{\xi^\nu}{(\xi-\alpha)^\nu (\xi-\beta)^\nu}$$
$$= C_\nu' \left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{x-a} - \frac{\sqrt{b^2+1}}{x-b} + \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)\sqrt{x^2+1} \right)^\nu.$$

Die Differentialgleichung ist

$$\sum_0^n a_\nu \left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{x-a} - \frac{\sqrt{b^2+1}}{x-b} + \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)\sqrt{x^2+1} \right)^\nu \frac{d^{n-\nu} u}{d x^{n-\nu}} = 0.$$

Allgemein wird die lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung auf dem rationalen Gebilde $y^2 = x^2 + 1$ mit den endlichen singulären Punkten $\xi = \alpha_\lambda (\neq 0)\,(\lambda = 1, 2 \ldots \sigma)$ offenbar

$$\sum_0^n \frac{g_{\nu(\sigma-2)}(\xi)\,\xi^\nu}{\psi^\nu(\xi)} \frac{d^{n-\nu} u}{d x^{n-\nu}} = 0; \quad (g_0 = 1).$$

Dabei ist $\psi = \prod_1^\sigma (\xi - \alpha_\lambda)$ und $g_{\nu(\sigma-2)}(\xi)$ ein Polynom höchstens $\nu(\sigma-2)$ten Grades in ξ. Sie enthält $n + \frac{n(n+1)}{2}(\sigma-2)$ Konstanten.

Zu beachten ist hier, daß die Einführung von ξ als unabhängige Veränderliche in die Differentialgleichung selbst, wie sie bei Klein, Vorlesungen 1894 S. 57 vorgenommen wird, für unsere gegenwärtige Aufgabe die Sache nicht vereinfachen würde; denn die Differentialgleichung in ξ kann, wie leicht zu sehen,

mehr singuläre Punkte besitzen als die Differentialgleichung $D(u)=0$ auf der Fläche; wollte man dann die letztere aus der ersteren konstruieren, so müßte man erst durch passende Bedingungsgleichungen dafür sorgen, daß die betreffenden singulären Punkte der ξ-Ebene sich in reguläre der x-Fläche verwandeln; einfaches Beispiel:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=u\sqrt{x^2+1};\quad \overline{D}_\xi(u)=\frac{d^2u}{d\xi^2}+\frac{2}{\xi(\xi^2+1)}\frac{du}{d\xi}-\frac{(\xi^2+1)^3u}{8\xi^5}=0$$

$\overline{D}_\xi(u)=0$ hat die singulären Punkte $\xi=\pm i$, denen für $D(u)=0$ die regulären Verzweigungspunkte $x=\pm i$ entsprechen.

§ 9.

Bestimmung der Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse in $\mathfrak{R}$.

Die Aufgabe, alle Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse in $\mathfrak{R}(x,y)$ ausfindig zu machen, kommt in der Sprache der Theorie der algebraischen Funktionen darauf hinaus, die sämtlichen Vielfachen[1]) der n Divisoren

$$\mathfrak{d}_\nu=\prod_{1}^{\sigma_\lambda}\mathfrak{p}_\lambda^{-\nu k_\lambda}\prod_{1}^{\tau_\lambda}\mathfrak{u}_\lambda^{\nu k_{\sigma+\lambda}}$$

zu bestimmen. Hier ist dann auch die Möglichkeit mit eingeschlossen, daß für gewisse ν $f_\nu\equiv 0$ ist.

Diese Aufgabe wird nun durch die Theorie der algebraischen Funktionen vollständig gelöst (siehe Hensel-Landsberg S. 204ff.

---

[1]) Der Begriff des Vielfachen ist hier im Sinne von H. L., nicht Jung genommen. Jung spricht a. a. O., den Begriff des Ideals vermeidend, von Vielfachen eines Divisors in bezug auf x, welcher Zusatz dann auch zeitweise weggelassen wird; darunter versteht er alle Funktionen des Ideals $\mathfrak{J}(\mathfrak{Q}')$, unter $\mathfrak{Q}'$ den auf endliche Punkte der Fläche $\mathfrak{R}_x$ bezüglichen Teil des Divisors $\mathfrak{Q}$ verstanden. Es erscheint aber übersichtlicher, wie es bei H. L. geschieht, dem Begriff „Vielfaches eines Divisors" seine birationalinvariante Bedeutung zu lassen, während bei Bevorzugung einer bestimmten unabhängigen Veränderlichen und Beiseitelassung des Verhaltens im Unendlichen von den Funktionen eines Ideals gesprochen werden soll.

und Jung S. 100 ff. sowie die betreffenden Abschnitte der Vorlesung von Perron). Wir geben daher nur kurz ohne Beweise die Methode an, die uns stets zum Ziele führt. Zunächst möge, wenn dies nicht schon der Fall ist, durch eine passende Substitution $x' = \frac{1}{x-a}$ dafür gesorgt werden, daß die unendlich fernen Punkte der Riemannschen Fläche einfach sind. Wir dürfen zugleich a so gewählt denken, daß über $x = a$ keiner der Punkte $\mathfrak{p}_\lambda$ gelegen ist. Alsdann sind die gesuchten Funktionen diejenigen Funktionen des Ideals

$$\mathfrak{J}\left(\prod_1^{\sigma+\tau}{}_\lambda \mathfrak{r}_\lambda^{\varrho_\lambda}\right)$$

der Fläche $\mathfrak{R}_{x'}$, die sich im Unendlichen regulär verhalten. Hierbei sind die Primteiler $\mathfrak{r}_\lambda$ dieselben wie $\mathfrak{p}_\lambda$, $\mathfrak{u}_\lambda$ zusammen und nur neue Zeichen eingeführt, da es sich jetzt um lauter endliche Punkte von $\mathfrak{R}_{x'}$ handelt. Ferner ist $\varrho_\lambda = \begin{cases} -\nu k_\lambda & \lambda \leqq \sigma \\ \nu k_\lambda & \text{f. } \lambda > \sigma \end{cases}$.

Wir haben nun eine Basis dieses Ideals aufzusuchen, d. h. ein System von m Funktionen $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)} \ldots \eta^{(m)}$ des Körpers derart, daß alle und nur die Funktionen von $\mathfrak{J}$ in der Form erscheinen

$$\eta = \sum_1^m{}_\mu g_\mu(x')\,\eta^{(\mu)}$$

unter $g_\mu(x')$ Polynome von x' verstanden. Dies wird folgendermaßen ausgeführt: Es sei $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)} \ldots \xi^{(m)}$ ein beliebiges System unabhängiger Funktionen des Körpers (z. B. $1, y, y^2, \ldots y^{m-1}$). Durch Multiplikation mit passenden Polynomen $h^{(\mu)}(x')$ kann (wenn dies nicht schon für alle $\xi^{(\mu)}$ der Fall ist) erreicht werden, daß die $h^{(\mu)}(x'))\,\xi^{(\mu)}$ sämtlich $\mathfrak{J}$ angehören; wir nehmen daher an, schon die $\xi^{(\mu)}$ hätten diese Eigenschaft. Jetzt mögen über $x' = a$ etwa die Punkte $\mathfrak{x}_1^{\sigma_1}\mathfrak{x}_2^{\sigma_2} \ldots \mathfrak{x}_l^{\sigma_l}$ mit den Verzweigungen $s_1, s_2, \ldots s_l$ $\left(\sum_1^l{}_\lambda s_\lambda = m\right)$ gelegen sein[1]). Ist $\xi_\nu^{(\mu)}$ der νte Zweig von $\xi^{(\mu)}$, so kann man setzen

[1]) Die Exponenten sind für Punkte $\mathfrak{r}_\lambda$ gleich ϱ_λ, sonst Null.

$$\xi^{(\mu)}_{s_0+s_1+\ldots s_{\lambda-1}+\varkappa} = \sum_1^{s_\lambda} (x'-\alpha)^{\frac{\sigma_\lambda+\nu-1}{s_\lambda}} e^{\frac{2\pi i(\sigma_\lambda+\nu-1)(k-1)}{s_\lambda}} \mathfrak{P}^{(\mu)}_{s_0+\ldots s_{\lambda-1}+\nu}(x'-\alpha)$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots l \quad s_0 = 0$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots s_\lambda \quad s_\lambda \geqq 1)$$

wobei die $\mathfrak{P}^{(\mu)}_\nu$ Potenzreihen sind. Es zeigt sich, daß $\sum_1^m \xi^{(\mu)} R_\mu(x')$ dann und nur dann in $\mathfrak{s}_\lambda (\lambda = 1, 2 \ldots l)$ für alle rationalen in $x' = \alpha$ regulären Funktionen und nur für solche mindestens die Ordnung σ_λ hat, wenn die Determinante $|\mathfrak{P}^{(\mu)}_\nu| \neq 0$ ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn die Diskriminante des Ideals Det. $|\xi^{(\mu)}_\nu|^2$, die eine im allgemeinen gebrochene rationale Funktion vorstellt, genau durch $(x'-\alpha)^{\sum_1^l \lambda 2\sigma_\lambda + s_\lambda - 1}$ teilbar ist, womit gemeint ist, daß $\frac{|\xi^{(\mu)}_\nu|^2}{(x'-\alpha)^{\Sigma 2\sigma_\lambda + s_\lambda - 1}}$ für $x' = \alpha$ regulär und $\neq 0$ ist. Dies kann, falls es nicht schon richtig ist, durch eine Reihe von Ersetzungen der Form $\zeta^{(\lambda)} = \frac{\sum_1^m c_\mu \xi^{(\mu)}}{x'-\alpha}$ herbeigeführt werden; alsdann heißt das System normal für die Stelle $x' = \alpha$ in bezug auf den betreffenden Divisor. Man kann dieses Verfahren der Reihe nach für alle Stellen von $\mathfrak{F}$ durchführen[1]), ohne durch die neuen Umformungen das Ergebnis an den bereits behandelten Stellen zu zerstören, und gelangt daher schließlich zu einem System $\eta^{(\mu)}$ wie gefordert. Es sind hieraus diejenigen Funktionen zu entnehmen, die im Unendlichen regulär sind.

Es sei $r^{(\mu)}_\nu$ die Ordnungszahl von $\eta^{(\mu)}_\nu$ im Unendlichen und $r^{(\mu)} = \underset{\nu=1,2\ldots m}{\text{Min.}}\, r^{(\mu)}$. Schreiben wir

[1]) Außerdem müssen noch die etwa nicht in $\mathfrak{F}$ vorkommenden Verzweigungspunkte, sowie die etwaigen anderen Nullstellen der Funktion $|\xi^{(\mu)}_\nu|^2$ in Betracht gezogen werden, für die dann die Exponenten $= 0$ zu setzen sind.

$$\eta_\nu^{(\mu)} = \left(\frac{1}{x'}\right)^{r^{(\mu)}} \mathfrak{Q}_\nu^{(\mu)}\left(\frac{1}{x'}\right).$$

so sind die $\mathfrak{Q}_\nu^{(\mu)}$ Potenzreihen. Ähnlich wie vorher wird bewirkt, daß Det. $|\mathfrak{Q}_\nu^{(\mu)}(0)| \neq 0$ ist. Man sagt dann, das System sei im Unendlichen normal. Seien dann die $r^{(\mu)}$ so angeordnet, daß

$$r^{(1)} \geqq r^{(2)} \geqq \ldots \geqq r^{(\mu_0)} \geqq 0 > r^{(\mu_0+1)} \geqq \ldots \geqq r^{(m)}.$$

dann sind die Funktionen

$$\sum_1^{\mu_0} g_\mu^{(r^{(\mu)})}(x')\,\eta^{(\mu)}$$

die sämtlichen Vielfachen des Divisors, unter $g_\mu^{(r^{(\mu)})}(x')$ Polynome höchstens vom Grade $r^{(\mu)}$ verstanden. (Sind alle $r^{(\mu)} > 0$, so gibt es keine Funktionen der gesuchten Art!)

Es ist übrigens ausreichend, wenn im Unendlichen lauter schlichte Punkte liegen; es können dann dort auch Nullstellen gefordert sein, ohne daß das Verfahren versagt; man wird daher auf eine Transformation $x' = \frac{1}{x-a}$ ganz verzichten, wenn schon von Anfang an lauter schlichte Punkte im Unendlichen liegen. Ist dann $\eta^{(\mu)}$ eine Basis des Ideals $\mathfrak{J}\left(\prod_1^\sigma \mathfrak{p}_\lambda^{-\nu k_\lambda}\right)$, die im Unendlichen normal ist, und hat $r^{(\mu)}$ die gleiche Bedeutung wie soeben, so sei jetzt

$$r^{(1)} \geqq r^{(2)} \geqq \ldots r^{(\mu_1)} \geqq \nu > \nu^{(\mu_1+1)} \ldots \geqq r^{(m)};$$

dann sind $\sum_1^{\mu_1} g_\mu^{(r^{(\mu)}-\nu)}(x)\,\eta^{(\mu)}$ die gesuchten Funktionen, unter $g_\mu^{(r^{(\mu)}-\nu)}(x)$ wieder Polynome höchstens $(r^{(\mu)}-\nu)$ten Grades verstanden. (Ist $r^{(\mu)} < \nu$ für alle μ, so gibt es keine Funktionen der gesuchten Art.)

§ 10.

Mannigfaltigkeit der Differentialgleichungen der Fuchs schen Klasse einer Fläche.

Wir gehen jetzt daran, mit Hilfe des Riemann-Roch schen Satzes die Mannigfaltigkeit der linearen Differentialgleichungen

der Fuchsschen Klasse mit vorgeschriebenen singulären Punkten auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{R}_x$ abzuzählen.

Es ist der Kürze des Ausdrucks halber hier zweckmäßig (wie vielfach üblich), den Begriff des Differentials einzuführen. Es sei η eine beliebige Funktion des Körpers, ferner sei jedem Punkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}$ ein Ortsparameter $t_\mathfrak{p}$ zugewiesen (aus den möglichen sei also ein bestimmter ausgewählt, etwa stets $t=(x-a)^{\frac{1}{k}}$ und im Unendlichen $t=x^{-\frac{1}{k}}$). Dann verstehen wir unter dem „Differential" $dv=\eta\,dx$ die Gesamtheit der Reihenentwicklungen $\mathfrak{R}(t_\mathfrak{p})=\eta\,\frac{dx}{dt_\mathfrak{p}}$; man wird auf sie geführt, wenn man das Abelsche Integral $\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}}\eta\,dx$ in der Nähe der Stelle $\mathfrak{p}$ betrachtet; es ist dann hinsichtlich $t_\mathfrak{p}$ als unabhängiger Veränderlicher in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ der Integrand eben $\eta\,\frac{dx}{dt_\mathfrak{p}}$. (Vergl. hierzu König und Krafft, Reihenentwicklungen analytischer Funktionen, Crelles Journal Bd. 154, 1925.) Die Gesamtheit der Entwicklungen $\mathfrak{R}(t_\mathfrak{p})$ konstituiert natürlich keine analytische Funktion; nichtsdestoweniger kann aber der Begriff der Teilbarkeit durch einen Divisor ganz analog wie für Funktionen des Körpers auch für Differentiale ausgesprochen werden (und zwar unabhängig von der Art, den Ortsparameter auszuwählen). Da es nun für das Verhalten der Abelschen Integrale auf das Verhalten gerade der Entwicklung $\mathfrak{R}(t_\mathfrak{p})$ (nicht unmittelbar der Entwicklung $\eta=\mathfrak{Q}(t_\mathfrak{p})$) ankommt, so wird hierdurch eine wesentliche Vereinfachung der Ausdrucksweise erzielt.

Wir formulieren nun den Riemann-Rochschen Satz in der für unsere Zwecke brauchbarsten Form; es mag gestattet sein, gleichzeitig der Übersichtlichkeit halber auf einige andere Formulierungen hinzuweisen, da die Darstellungen in dieser Hinsicht bekanntlich nicht einheitlich sind. (Man vgl. z. B. Weyl, Idee der Riemannschen Fläche S. 122; Jung, Einführung S. 152;

Severi-Löffler, Vorlesungen über algebraische Geometrie S. 127.)

Es sei $\mathfrak{Q} = \prod_{1}^{N} \mathfrak{p}_\nu^{\varrho_\nu}$ ein beliebiger Divisor von der Gesamtordnung $R = \sum_{1}^{N} \varrho_\nu$.

Sei q die Zahl der linear unabhängigen Funktionen des Körpers, die Vielfache von $\mathfrak{Q}$ sind (= Zahl der linear unabhängigen (absolut) ganzen Divisoren der Klasse $\left(\frac{1}{\mathfrak{Q}}\right)$ = Dimension der Klasse $\left(\frac{1}{\mathfrak{Q}}\right)$); sei ferner $\overline{q}$ die Zahl der linear unabhängigen Differentiale, die Vielfache von $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$ sind (= Zahl der Funktionen, die Vielfache des Divisors $\frac{\mathfrak{n}^2 x}{\mathfrak{Q}\,\mathfrak{Z}x}$ sind, = Dimension der „Ergänzungsklasse“ $\left(\frac{\mathfrak{Q}\,\mathfrak{Z}x}{\mathfrak{n}^2 x}\right)$ zu $\left(\frac{1}{\mathfrak{Q}}\right)$, wo $x = \frac{\mathfrak{z}x}{\mathfrak{n}x}$; $\mathfrak{Z}x = \prod_{1}^{L} \mathfrak{q}_\lambda^{k_\lambda - 1}$ über alle Verzweigungspunkte genommen, gesetzt ist). Dann gilt

$$\overline{q} - q = R + p - 1.$$

Liegen insbesondere im Unendlichen m getrennte Punkte, an denen überall gleiche Mindestordnung ϱ^* vorgeschrieben ist, so sind die Vielfachen von $\mathfrak{Q}$ diejenigen Funktionen des Ideals $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\left(\prod_{1}^{N'} \mathfrak{p}_\nu^{\varrho_\nu}\right)$ ($\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_{N'}$ die endlichen Primteiler aus $\mathfrak{Q}$), die im Unendlichen noch mindestens die Ordnung ϱ^* besitzen; die Vielfachen von $\frac{\mathfrak{n}^2 x}{\mathfrak{Q}\,\mathfrak{Z}x}$ sind die Funktionen des zu $\mathfrak{J}$ „komplementären Ideals“ $\overline{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}\left(\prod_{1}^{N'} \mathfrak{p}_\nu^{-\varrho_\nu - k_\nu + 1}\right)$, welche im Unendlichen noch mindestens die Ordnungszahl $2 - \varrho^*$ besitzen.

Um die Mannigfaltigkeit der Funktionen f_ν zu ermitteln, haben wir (für $\nu = 1, 2, \ldots n$) den Divisor

$$\mathfrak{Q}_\nu = \prod_{1}^{\lambda}{}^{\sigma} \mathfrak{p}_\lambda^{-\nu k_\lambda} \prod_{1}^{\lambda}{}^{\tau} \mathfrak{u}^{\nu k_\sigma + \lambda}$$

mit der Gesamtordnung

$$R = \nu\,(m - K) \quad (\leqq 0)$$

zu betrachten, wo $K = \sum_{1}^{\lambda}{}^{\sigma} k_\lambda$

gesetzt ist. Es wird

$$\frac{1}{\mathfrak{Q}_\nu} = \prod_{1}^{\lambda}{}^{\sigma} \mathfrak{p}_\lambda^{\nu k_\lambda} \prod_{1}^{\lambda}{}^{\tau} \mathfrak{u}^{-\nu k_\sigma + \lambda}$$

und es ist also in den obigen Bezeichnungen:

$$\bar{q}_\nu = q_\nu + \nu\,(m - K) + p - 1.$$

Nun ist die Ordnung der Differentialklasse (= Klasse der Divisoren, denen Differentiale entsprechen) gleich $2p - 2$; soll also $\bar{q}_\nu \neq 0$ sein, so muß man haben $\nu(K - m) \leqq 2p - 2$, während anderseits nach früherem (S. 31) $\nu\,(K - m) \geqq 0$ gewählt sein muß, es sei denn $f_\nu \equiv 0$.

Für $p = 0$, und für $K > m + 2\,\frac{p-1}{\nu}$ und p beliebig gilt also $\bar{q}_\nu = 0$, somit $q_\nu = \nu\,(K - m) - p + 1$.

Für $p = 0$ kommt insbesondere $q_\nu = 1 + \nu\,(K - m)$, $= 1 + \nu(\sigma - m)$, falls lauter schlichte singuläre Punkte vorliegen, $q_\nu = 1$ für $\sigma = m$. Dies ist der Fall bei dem Beispiel (§ 8 S. 32 ff.). Für $m = 1$ ergibt sich, wie bekannt, $q_\nu = 1 + \nu\,(\sigma - 1)$. (Hier hat ja f_ν die Form $\frac{g_{\nu(\sigma-1)}(x)}{\prod_{1}^{\lambda}{}^{\sigma} (x - a_\lambda)^\nu}$ unter $g_{\nu(\sigma-1)}(x)$ ein Polynom höchstens des angegebenen Grades verstanden.)

Die Zahl der Konstanten, die unsere Differentialgleichung enthält, ist, wenn einer der obigen Fälle für alle ν eintritt, d. h. für $p = 0$ oder $K > m + 2p - 2$

$$\frac{n\,(n+1)}{2}\,(K - m) - n\,(p - 1).$$

Um allgemein die Dimension der Schar f_ν zu erfahren, ohne daß dieselbe nach den Methoden des vorigen Paragraphen voll-

ständig aufgestellt werden muß, bemerken wir, daß die fraglichen $\overline{q}_\nu$ Differentiale jedenfalls auch Vielfache des Divisors

$$\frac{1}{\mathfrak{Q}'_\nu} = \prod_{1}^{\tau} {}_\lambda \, u_\lambda^{-\nu k\sigma+\lambda}$$

sein müssen. Hier liefert aber der Riemann-Roch sche Satz ohne weiteres wegen $q'_\nu = 0$

$$\overline{q}'_\nu = \nu m + p - 1 .$$

Es seien jetzt $dv_1, dv_2, \ldots dv_{\nu m+p-1}$ irgend $\overline{q}'_\nu$ linear unabhängige Differentiale dieser Art. Alle Differentiale, die Vielfache von $\frac{1}{\mathfrak{Q}'_\nu}$ sind, haben die Form

$$dv = \sum_{1}^{\nu m+p-1} {}_\varkappa \, C_\varkappa \, dv_\varkappa .$$

Alle diejenigen unter ihnen, die auch noch Vielfache des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{Q}''_\nu} = \prod_{1}^{\sigma} {}_\lambda \, \mathfrak{p}_\lambda^{\nu k_\lambda}$ sind, erhält man nun, indem man die Konstanten auf alle möglichen Arten so wählt, daß

$$\text{I.} \qquad \sum_{1}^{\overline{q}'_\nu} {}_\varkappa \, C_\varkappa \left(\frac{dv_\varkappa}{dt_\lambda}\right)_{t_\lambda=0} = 0 ; \quad \sum_{1}^{\overline{q}'_\nu} {}_\varkappa \, C_\varkappa \left(\frac{d^2 v_\varkappa}{dt_\lambda^2}\right)_{t_\lambda=0} = 0 ; \ldots$$

allgemein

$$\sum_{1}^{\overline{q}'_\nu} {}_\varkappa \, C_\varkappa \left(\frac{d^\mu v_\varkappa}{dt_\lambda^\mu}\right)_{t_\lambda=0} = 0 \qquad \begin{matrix} \text{f. } \mu = 1, 2, 3, \ldots \nu k_\lambda \\ \lambda = 1, 2, \ldots \ldots \sigma \\ (t_\lambda = t_{\mathfrak{p}_\lambda}) \end{matrix}$$

Dies sind νK lineare homogene Gleichungen mit $\overline{q}'_\nu = \nu m + p - 1$ Unbekannten $C_\varkappa$.

Ist R_ν der Rang der Matrix

$$\text{II.} \qquad \left\| \left(\frac{d^\mu v_\varkappa}{dt_\lambda^\mu}\right)_{t_\lambda=0} \right\| \qquad \begin{matrix} \varkappa = 1, 2, \ldots \nu m + p - 1 \\ \mu = 1, 2, \ldots \nu k_\lambda ; \ \lambda = 1, 2, \ldots \sigma \end{matrix}$$

so ist die Zahl der linear unabhängigen Lösungen $\overline{q}_\nu = \overline{q}'_\nu - R_\nu$ und daher allgemein $q_\nu = \nu K - R_\nu$.

Für die Bestimmung von R_ν ist nicht die Aufstellung von f_ν erforderlich, sondern nur die Aufstellung der Differentiale, die an den festen, von der Wahl der $\mathfrak{p}_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots \sigma)$ unabhängigen unendlich fernen Stellen höchstens Pole der vorgeschriebenen Ordnung haben — eine bekannte, als von vornherein gelöst anzusehende Aufgabe — und dann die Untersuchung dieser Differentiale an den Punkten $\mathfrak{p}_\lambda$.

Es sei nun

1.) $\nu K \leqq \nu m + p - 1$, d. h. die Zahl der Gleichungen I. kleiner als die oder höchstens gleich der Zahl der Unbekannten. Es ist dann stets $R_\nu \leqq \nu K$, also $\overline{q}_\nu \geqq \nu (m - K) + p - 1$ und damit

$$q_\nu \geqq 0 .$$

Als „allgemeiner Fall" ist derjenige anzusehen, wo nicht alle νK reihigen Unterdeterminanten der Matrix II. verschwinden, also

$$R_\nu = \nu K ; \quad q_\nu = 0$$

(es ist klar, daß man die Punkte $\mathfrak{p}_\lambda$ auf unendlich viele Arten so wählen kann, daß diese Forderung erfüllt ist, vgl. z. B. Weyl S. 123). In diesem Sinne ist hier „im allgemeinen" $q_\nu = 0$, es kann aber bei besonderer Wahl des Divisors $\mathfrak{Q}_\nu$ auch $q_\nu > 0$ sein.

2.) Sei $\nu K > \nu m + p - 1$, d. h. die Zahl der Unbekannten kleiner als die Zahl der Gleichungen. Dann ist $R_\nu \leqq \nu m + p - 1$ also

$$q_\nu \geqq \nu (K - m) - p + 1 .$$

„Im allgemeinen" sind bereits die Unterdeterminanten $(\nu m + p - 1)$ter Ordnung nicht sämtlich Null, dann ist also

$$\overline{q}_\nu = 0 ; \quad q_\nu = \nu (K - m) - p + 1 .$$

Dieser Fall tritt, wie schon oben sich ergab (S. 43), sogar immer dann ein, wenn $\nu K > \nu m + 2(p - 1)$; es kann aber für $\nu m + p - 1 < \nu K \leqq \nu m + 2(p - 1)$ auch bei besonderer Wahl von $\mathfrak{Q}_\nu$ sein $q_\nu > \nu (K - m) - p + 1$. Im allgemeinen enthält also auch eine Differentialgleichung, für die $K \geqq m + p - 1$ ist, $\frac{n(n+1)}{2}(K - m) - n(p - 1)$ willkürliche Konstante.

Der „Ausnahmefall" von 1.) tritt z. B. dann ein, wenn von den entsprechend der Forderung 1.) gewählten Punkten $\mathfrak{p}_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots \sigma)$

einige, etwa die Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_{\sigma_0}$ $(\sigma_0 \geqq 1)$ m blättrig sind. Denn dann gibt es rationale Funktionen f_ν. Verstehen wir nämlich unter $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_{\sigma_0}, \mathfrak{U}$ die rationalen Primteiler, die bzw. den algebraischen Primteilern $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_{\sigma_0}$ sowie den Primteilern $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots \mathfrak{u}_\tau$ zusammen entsprechen, so sind die rationalen Vielfachen von $\prod_1^{\sigma_0} \mathfrak{P}_\lambda^{-\nu} \mathfrak{U}^\nu$ sicher sämtlich unter den Vielfachen von $\prod_1^{\sigma} \mathfrak{p}_\lambda^{-\nu m} \prod_1^{\tau} \mathfrak{u}_\lambda^{\nu} k_{\sigma+\lambda}$ enthalten. Denn diese rationalen Funktionen sind offenbar Funktionen von $\Re(x, y)$, haben überdies in $\mathfrak{p}_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots \sigma_0)$ mindestens die vorgeschriebene Ordnung, ebenso in $\mathfrak{p}_\lambda$ f. $\lambda = \sigma_0 + 1, \ldots \sigma$, da sie dort sogar regulär sind, endlich auch in den unendlich fernen Punkten $\mathfrak{u}_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots \tau)$. Es gibt nun genau $(q_\nu) = 1 + \nu(\sigma_0 - 1)$ linear unabhängige derartige rationale Funktionen und daher ist auch $q_\nu \geqq (q_\nu) > 0$, während im „allgemeinen" Fall 1.) $q_\nu = 0$ war.

Als Beispiel sei das hyperelliptische Gebilde vorgelegt $(p \geqq 1;\ \alpha_\lambda \neq \alpha_\varkappa)$: $y^2 = \prod_1^{2p+2} (x - \alpha_\lambda)$ und eine Differentialgleichung $n$ter Ordnung aufzustellen, deren endliche singuläre Punkte in den σ_0 Verzweigungspunkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\sigma_0}$ $(1 \leqq \sigma_0 \leqq 2p+2)$ liegen. Es ist $K = 2\sigma_0$; $m = 2$.

Eine Basis für das Ideal $\mathfrak{J}(\mathfrak{p}_1^{-2\nu} \ldots \mathfrak{p}_{\sigma_0}^{-2\nu})$ ist

$$\eta^{(1)} = \frac{1}{\prod_1^{\sigma_0} (x - \alpha_\lambda)^\nu}; \quad \eta^{(2)} = \frac{y}{\prod_1^{\sigma_0} (x - \alpha_\lambda)^\nu}$$

wie leicht zu sehen; denn die Diskriminante ist

$$4 \frac{\prod_1^{2p+2} (x - \alpha_\lambda)^{\sigma_0+1}}{\prod_1^{\sigma_0} (x - \alpha_\lambda)^{4\nu-1}},$$

also genau durch die nach S. 39 zu fordernden Linearfaktoren teilbar. Es sei nun

$$f_\nu = \frac{g_\nu(x) + h_\nu(x)\, y}{\prod_1^{\sigma_0} \prod_1^{\lambda} (x - a_\lambda)^\nu}.$$

Hier ist $g_\nu(x)$ höchstens vom $\nu(\sigma_0 - 1)$ Grade und enthält $1 + \nu(\sigma_0 - 1)$ Konstante; ist

1.) $\nu < \frac{p+1}{\sigma_0 - 1}$ $(\sigma_0 > 1)$, so ist $h_\nu(x) \equiv 0$, und das bleibt auch für $\sigma_0 = 1$ und alle ν so;

2.) $\nu \geqq \frac{p+1}{\sigma_0 - 1}$, so ist $h_\nu(x)$ höchstens vom Grade $\nu(\sigma_0 - 1) - p - 1$, sodaß jetzt f_ν $2\nu(\sigma_0 - 1) - p + 1$ Konstante enthält.

In der Tat liegt für

$\nu \leqq (=) \frac{p-1}{2(\sigma_0 - 1)}$ der Ausnahmefall 1.) vor, übrigens auch für $\frac{p-1}{2(\sigma_0 - 1)} < \nu < \frac{p-1}{\sigma_0 - 1}$ der Ausnahmefall 2.), aber für $\nu > \frac{p-1}{\sigma_0 - 1}$ der allgemeine Fall 2.), der jetzt keine Ausnahme mehr erleiden kann (siehe oben S. 43). Für $\sigma_0 = 1$ und alle n sowie für $n < \frac{p+1}{\sigma_0 - 1}$ kommen nur Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten zustande. Der einfachste höhere Fall

$$\sigma_0 = 2;\ p = 1$$
$$n = 2 \qquad \text{ist}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{Ax + B}{(x - a_1)(x - a_2)} \frac{du}{dx} + \frac{Cx^2 + Dx + E + F\sqrt{\prod_1^4 (x - a_\lambda)}}{(x - a_1)^2 (x - a_2)^2} u = 0.$$

§ 11.

Die Fuchssche Beziehung auf $\mathfrak{R}$.

Die Wurzeln der determinierenden Gleichungen genügen bei einer Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse mit rationalen Koeffizienten einer bekannten Beziehung, nämlich

$$\sum_1^n \sum_1^{\sigma+1} r_\lambda^{(\nu)} = \frac{n(n-1)}{2}(\sigma - 1),$$

wenn mit $r_\lambda^{(\nu)}$ die νte Wurzel der zum (singulären) Punkte a_λ gehörigen Gleichung bezeichnet wird ($a_{\sigma+1}=\infty$). Etwas Entsprechendes gilt auch in unserm Fall.

Zur Herleitung dieser Beziehung nehmen wir (mit gegen früher etwas abgeänderter Bezeichnung) f_ν in der Form an:

$$f_\nu = \sum_0^\infty{}_\varkappa\, a_{\nu\varkappa}(x-a)^{\frac{-\nu k+\varkappa}{k}}$$

($k=1$ für reguläre Punkte). Hierin ist auch ein unendlich ferner Punkt inbegriffen, wenn wir (etwas anders als früher) jetzt für einen solchen $k<0$ annehmen (und etwa $a=0$ setzen). Die determinierende Gleichung gewinnt man dann durch den Ansatz

$$u = \sum_0^\infty{}_\lambda\, D_\lambda (x-a)^{\frac{r+\lambda}{k}}.$$

Sie wird also

$$\sum_0^n{}_\nu \frac{r}{k}\left(\frac{r}{k}-1\right)\cdots\left(\frac{r}{k}-(n-\nu-1)\right)a_{\nu 0}=0 \text{ mit } a_{00}=1.$$

Dabei ist offenbar $k\,a_{10}=A$ das Residuum der algebraischen Funktion f_1 an der betrachteten Stelle (es scheint nicht notwendig, hier sogar nicht zweckmäßig zu sein, das Residuum nur dem Differential $f\,dx$, nicht auch der Funktion f zuzuordnen, wie Weyl, Idee der Riemannschen Fläche S. 56 das verlangt), und zwar gleichgültig, ob es sich um einen endlichen oder unendlich fernen Punkt handelt. Für die Wurzeln an der Stelle $\mathfrak{p}$ hat man also

$$\sum_1^n{}_\nu\, r^{(\nu)} = k\sum_1^{n-1}{}_\varkappa\, \varkappa - A = k\,\frac{n(n-1)}{2} - A.$$

Werden jetzt die Wurzeln an der λten singulären Stelle mit $r_\lambda^{(\nu)}$ bezeichnet ($\lambda=1,2,\ldots\sigma,\sigma+1,\ldots\sigma+\tau$), so kommt, da die Summe aller Residuen verschwindet

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_1^{\sigma+\tau}{}_\lambda\, r_\lambda^{(\nu)} = \frac{n(n-1)}{2}\sum_1^{\sigma+\tau}{}_\lambda\, k_\lambda = \frac{n(n-1)}{2}\left\{\sum_1^\sigma{}_\lambda\, k_\lambda - m\right\}$$
$$= \frac{n(n-1)}{2}(K-m).$$

In der ersten Form bleibt diese Relation jedenfalls auch richtig, wenn man außer den singulären und unendlich fernen Punkten auch noch beliebig viele reguläre Punkte aufnimmt, denn dort sind die Exponenten $0, k, 2k, \ldots (n-1)k$, so daß sich nur rechts und links die Summe um $k\,\frac{n(n-1)}{2}$ vermehrt. Rechnen wir daher jetzt auch sämtliche L Verzweigungspunkte mit in die Summe ein, wodurch sich die Gesamtzahl der betrachteten Punkte auf S stellen möge, so kommt, wenn die Blätterzahlen jetzt h_λ heißen, und zwar

$$h_1 = h_2 = \ldots h_t = 1; \quad h_{t+1}, \ldots h_{t+L} > 1,$$

so wird

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_1^S{}_\lambda r_\lambda^{(\nu)} = \frac{n(n-1)}{2}\left(t + L + \sum_1^L{}_\lambda (h_{t+\lambda} - 1) - 2m\right)$$
$$= \frac{n(n-1)}{2}(t + L + 2p - 2).$$

Nimmt man nunmehr speziell an, alle Verzweigungspunkte seien uneigentlich singulär zweiter Art, so daß die Exponentensumme an jedem von ihnen $\frac{n(n-1)}{2}$ wird, so kommt

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_1^t{}_\lambda r_\lambda^{(\nu)} = \frac{n(n-1)}{2}(t + 2p - 2).$$

Setzt man insbesondere $t = t_0 + t_1 + t_2$, wo t_1 die Zahl der „scheinbar singulären" Punkte mit den Exponenten $\gamma_\lambda, \gamma_\lambda + 1, \ldots$ $\gamma_\lambda + n - 1$ (dort ist also $\frac{u_\mu}{u_1}$ regulär!), und t_2 die Zahl der „einfachen" Nebenpunkte mit Exponenten $0, 1, 2, \ldots n-2, n$, so wird (bei passender Numerierung)

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_{t_0+1}^{t_0+t_1}{}_\lambda r_\lambda^{(\nu)} = t_1 \sum_1^{t_1}{}_\lambda \gamma_\lambda + \frac{n(n-1)}{2} t_1; \quad \sum_1^n{}_\nu \sum_{t_0+t_1+1}^S{}_\lambda r_\lambda^{(\nu)} = t_2\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$$

und man erhält daher:

$$\sum_1^n{}_\nu \sum_1^{t_0}{}_\lambda r_\lambda^{(\nu)} + t_1 \sum_1^{t_1}{}_\lambda \gamma_\lambda + t_2 = \frac{n(n-1)}{2}(t_0 + 2p - 2).$$

Diese letzte Form ist bei Groß, Monatshefte für Mathematik und Physik 1911 S. 317 erwähnt.

§ 12.

Differentialgleichungen mit höchstens uneigentlich singulären Punkten.

Es gibt natürlich außer dem trivialen Falle $\frac{du}{dx} = 0$ auch auf $\mathfrak{R}$ keine Differentialgleichung mit nur regulären Punkten; denn die Koeffizienten f_ν derselben müßten überall regulär sein und im Unendlichen verschwinden, also identisch Null sein; $\frac{d^n u}{dx^n} = 0$ aber hat nur für $n = 1$ lauter im Unendlichen reguläre Integrale.

Dagegen kann man ohne weiteres Differentialgleichungen angeben, deren Integrale in der Umgebung jeder Stelle von $\mathfrak{R}$ eindeutig und regulär sind; sei z. B. η ein Integrand erster Gattung, dann sind 1.) $\frac{du}{dx} = \eta u$ und 2.) $\eta \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{d\eta}{dx}\frac{du}{dx} = 0$ mit den Integralen $u = Ce^{\int \eta\, dx}$ und $u = C_1 + C_2 \int \eta\, dx$ solche Differentialgleichungen. Indes wird man hier unter Umständen Nebenpunkte (s. S. 28, c) in Kauf nehmen müssen; sei z. B.

$$\eta = \frac{x^\mu}{y}, \text{ wo } y^2 = \prod_1^{2p+2}{}_\lambda (x - \alpha_\lambda) \quad (\alpha_\lambda \neq \alpha_\varkappa \neq 0)$$

ein hyperelliptisches Gebilde vom Geschlecht $p > 1$ sei;

$$(0 \leqq \mu \leqq p - 1).$$

Im Unendlichen hat

$$\int_\infty^x \eta\, dx = \pm \int_\infty^x \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{p-1-\mu} + \cdots \right) \frac{dx}{x^2}$$

offenbar die Ordnung $p - \mu$, in den beiden Nullpunkten

$$\int_0^x \eta\, dx = \pm \int_0^x (x^\mu + \cdots)\, dx$$

die Ordnung $\mu + 1$; sonach sind die Exponenten dort bezw. $\begin{cases} 0; & p - \mu \\ 0; & \mu + 1 \end{cases}$. Für $\begin{cases} \mu = 0 \\ \mu = p - 1 \end{cases}$ hat also die Differentialgleichung

im Unendlichen
an den Nullpunkten } Nebenpunkte mit den Exponenten $0, p$, für $0 < \mu < p-1$ $(p > 2)$ sogar an allen 4 Punkten Nebenpunkte.

Wir fragen uns daher jetzt nach Differentialgleichungen, die höchstens uneigentlich singuläre Punkte haben, während alle schlichten Punkte regulär sein sollen.

Es seien dann $q_1, q_2, \ldots q_r$ die regulären oder uneigentlich singulären Verzweigungspunkte erster Art, $q_{r+1}, \ldots q_L$ die uneigentlich singulären Punkte zweiter Art. Dann wird $\sum_1^n \sum_1^L r_\lambda^{(\nu)} = \frac{n(n-1)}{2}(k_1 + k_2 + \ldots k_r + L - r)$ (k_λ Blätterzahlen und andererseits gleich $\frac{n(n-1)}{2}(L + 2p - 2)$ (etwaige schlichte reguläre ∞ ferne Punkte sind rechts und links weggelassen), also $\sum_1^r k_\lambda = r + 2p - 2$; ist daher $k^* = \text{Min. } k_\lambda$ $\lambda = 1, 2 \ldots r$, so wird $rk^* \leqq \sum_1^r k_\lambda$ also $(k^* - 1)r \leqq 2p - 2$ oder $r \leqq \frac{2p-2}{k^*-1}$. In allen Fällen ist jedenfalls $r \leqq 2p - 2$ zu wählen. Für $p = 1$ ergibt sich $r = 0$ und daher:
alle Differentialgleichungen auf einem elliptischen Gebilde z. B. $y^2 = \prod_1^4 (x - a_\lambda)$, die höchstens uneigentlich singuläre Punkte haben, müssen in allen Verzweigungspunkten uneigentlich singuläre Punkte zweiter Art besitzen. Umgekehrt folgt aus S. 49, daß (für $n > 1$) Differentialgleichungen, die in allen Verzweigungspunkten uneigentlich singulär zweiter Art sind, während alle andern Punkte regulär sind, nur für $p = 1$ existieren. Soll daher für $p > 1$ die Differentialgleichung in allen Verzweigungspunkten uneigentlich singulär zweiter Art sein, so muß noch mindestens ein singulärer Punkt außerdem auftreten, und sollen gleichwohl die Integrale an jeder Stelle regulär sein, so muß es sich um einen Nebenpunkt handeln. Hierfür hatten wir auf S. 50 ein Beispiel (2). — Die Aufstellung

aller hierhergehörigen Differentialgleichungen kann erfolgen, indem man die Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse aufstellt und dann die Zusatzbedingungen §§ 5, 6 benutzt. Wir gehen jetzt zu weiteren Beispielen über.

§ 13.

„Nicht singuläre" Differentialgleichungen auf dem hyperelliptischen Gebilde.

Es werde zunächst das Gebilde $y^2 = \prod_1^4 (x - \alpha_\lambda) = f$ betrachtet. ($\mathfrak{p}_\lambda$ Verzweigungspunkte, $\mathfrak{u}_1\,\mathfrak{u}_2$ unendlich ferne Punkte. Wir stellen alle Differentialgleichungen 2. Ordnung auf, die höchstens uneigentlich singuläre Punkte haben. Nach dem Früheren muß in

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f_1\frac{du}{dx} + f_2 u = 0$$

f_1 ein Vielfaches von $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{p}_1^{-2}\mathfrak{p}_2^{-2}\mathfrak{p}_3^{-2}\mathfrak{p}_4^{-2}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2$ und
f_2 ein Vielfaches von $\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{p}_1^{-4}\mathfrak{p}_2^{-4}\mathfrak{p}_3^{-4}\mathfrak{p}_4^{-4}\mathfrak{u}_1^{2}\mathfrak{u}_2^{2}$ sein.
Eine Basis des Ideals $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}(\mathfrak{p}_1^{-2}\mathfrak{p}_2^{-2}\mathfrak{p}_3^{-2}\mathfrak{p}_4^{-2})$ ist (nach S. 46)

$$\eta^{(1)} = \frac{1}{f}; \quad \eta^{(2)} = \frac{\sqrt{f}}{f}.$$

Unter den Funktionen von $\mathfrak{J}_1$, nämlich $\frac{g_1(x) + h_1(x)\sqrt{f}}{f}$, wo $g_1(x), h_1(x)$ Polynome sind, verschwinden die und nur die in den beiden unendlich fernen Punkten mindestens einfach, für die $g_1(x)$ höchstens 3. / $h_1(x)$ höchstens 1. Grades ist, wie ohne weiteres ersichtlich.
Entsprechend ist eine Basis von $\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}(\mathfrak{p}_1^{-4}\mathfrak{p}_2^{-4}\mathfrak{p}_3^{-4}\mathfrak{p}_4^{-4})$

$$\zeta^{(1)} = \frac{1}{f^2}; \quad \zeta^{(2)} = \frac{\sqrt{f}}{f^2}$$

und die Vielfachen von $\mathfrak{d}_2$ sind

$$\frac{g_2(x) + h_2(x)\sqrt{f}}{f^2}$$

wobei die Polynome

$$\left.\begin{array}{l} g_2(x) \text{ höchstens 6.} \\ h_2(x) \text{ höchstens 4.} \end{array}\right\} \text{ Grades sein dürfen.}$$

Wir haben jetzt die einzelnen Punkte zu untersuchen. Mit $x - a_\lambda = t^2$ wird am Punkte p_λ die Differentialgleichung (nach § 3)

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(2tf_1 - \frac{1}{t}\right)\frac{du}{dt} + 4f_2 t^2 u = 0 .$$

Nun ist

$$2tf_1 = \frac{2g_1(a_\lambda) + g_1'(a_\lambda)t^2 + \cdots + (h_1(a_\lambda) + \cdots)\, t\sqrt{f'(a_\lambda)}\,(1 + \cdots)}{tf'(a_\lambda) + \cdots}$$

wo die Punkte stets höhere Potenzen von t andeuten und $f'(a_\lambda) \neq 0$ ist.

Hieraus folgt sofort $g_1(a_\lambda) = \frac{f'(a_\lambda)}{2}$ $(\lambda = 1 \ldots 4)$ und daher, weil $g_1(x)$ höchstens vom 3. Grade ist:

$$g_1(x) = \frac{f'(x)}{2} .$$

Es ist ferner

$$t^2 f_2 = \frac{g_2(a_\lambda) + g_2'(a_\lambda)t^2 + \cdots + (h_2(a_\lambda) + h_2'(a_\lambda)t^2 + \cdots)\, t\sqrt{f'(a_\lambda)}\,(1 + \cdots)}{t^2 f'^2(a_\lambda) + \cdots}$$

also

$$g_2(a_\lambda) = 0$$
$$h_2(a_\lambda) = 0 ,$$

also

$$g_2(x) = f(x)\,(B + B_1 x + B_2 x^2)$$
$$h_2(x) = Cf(x) \quad [B, B_1, B_2, C \text{ Konstante}].$$

Ferner enthält die Differentialgleichung im Unendlichen die Gestalt

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{2}{t} - \frac{f_1}{t^2}\right)\frac{du}{dt} + \frac{f_2}{t^4}u = 0 \quad \left(x = \frac{1}{t}\right).$$

Man hat, beide Blätter gleichzeitig betrachtend,

$$\frac{f_1}{t^2} = + \frac{2}{t} + \cdots \pm \left(\frac{A_1}{t} + A + \cdots\right),$$

also folgt $A_1 = 0$; $h_1(x) = A = \text{konst.}$; ferner ist

$$f_2 = \frac{B + B_1 x + B_2 x^2 + C\sqrt{f}}{f}$$

und

$$\frac{f_2}{t^4} = \frac{B_2}{t^2} + \frac{B_1 - a_1 B_2}{t} + B - a_1 B_1 + (a_1^2 - a_2) B_2 + \cdots \pm C\left(\frac{1}{t^2} + \cdots\right),$$

wenn $f = x^4 + a_1 x^3 + \cdots$; somit

$$B_2 = B_1 = C = 0;\ f_2 = \frac{B}{f}$$

und die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{f' + 2A\sqrt{f}}{2f}\frac{du}{dx} + \frac{Bu}{f} = 0$$

oder

$$f\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{f'}{2} + A\sqrt{f}\right)\frac{du}{dx} + Bu = 0.$$

Zur Integration sei $v = \int \frac{du}{\sqrt{f}}$ das elliptische Integral erster Gattung. $u = e^{\lambda v}$, unter λ eine unbekannte Konstante verstanden, erfüllt die Differentialgleichung, sobald $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$, wie man durch Einsetzen findet. Somit ergeben sich für $\Delta = A^2 - 4B \neq 0$ die zwei linear unabhängigen Integrale

$$u_{1,2} = e^{\frac{-A \pm \sqrt{\Delta}}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{f}}};\quad \text{für } \Delta = 0 \text{ aber}$$

$$u_1 = e^{-\frac{A}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{f}}};\quad u_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{f}} \cdot e^{-\frac{A}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{f}}}.$$

In der Tat, führt man die elliptische Funktion $x = x(v)$ ein, so geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{d^2u}{dv^2} + A\frac{du}{dv} + Bu = 0$$

mit konstanten Koeffizienten. Man darf sich hier nicht daran stoßen, daß die Integrale der neuen Differentialgleichung in der v-Ebene einen wesentlich singulären Punkt im Unendlichen haben; in Wahrheit wird ja die Fläche $\mathfrak{R}$ durch $x = x(v)$ auf

ein einfaches Periodenparallelogramm abgebildet, und erst bei unendlich vielen passenden Umläufen auf $\mathfrak{R}$ nähert man sich in der x-Ebene dem unendlich fernen Punkt, so daß die Integrale in jedem Punkt von $\mathfrak{R}$ regulär sind (siehe Klein, Vorlesungen S. 62/63).

Durch Anwendung derselben Methoden findet man für die allgemeinste Differentialgleichung dritter Ordnung mit nur uneigentlich singulären Punkten auf $\mathfrak{R}$

$$f\frac{d^3u}{dx^3}+\left(\frac{3}{2}f'+A\sqrt{f}\right)\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{f''}{2}+B+\frac{A}{2}\frac{f'\sqrt{f}}{f}\right)\frac{du}{dx}+\frac{Cu}{\sqrt{f}}=0,$$

deren Integration sich ganz entsprechend auf die Gleichung $\lambda^3+A\lambda^2+B\lambda+C=0$ zurückführen läßt, und so kann für beliebiges n fortgefahren werden.

Ein Blick auf die Theorie der elliptischen Funktionen lehrt, daß wir auch für beliebiges n keine wesentlich allgemeineren Fälle zu erwarten haben. Sei nämlich jetzt $\begin{matrix}x=x(v)\\y=y(v)\end{matrix}$ eingeführt, wodurch $\frac{d^nu}{dv^n}+\sum_1^n\varphi_\nu\frac{d^{n-\nu}u}{dv^{n-\nu}}=0$ entstehe. Die Koeffizienten φ_ν sind jedenfalls eindeutige elliptische Funktionen von v, da x und y solche sind. Ferner sei ein beliebiger Punkt $\neq\mathfrak{p}_\lambda$ von $\mathfrak{R}$ betrachtet. Man hat dann, wenn etwa $v=\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}}\frac{dx}{\sqrt{f}}$

$v=\alpha_0+\alpha_1(x-a)+\ldots$ bezw.

$v=\beta_0+\beta_1x'+\ldots\ldots$ mit $x'=\frac{1}{x}$ an einem ∞ fernen Punkt wobei $\alpha_1\neq0$, $\beta_1\neq0$.

Hieraus ergibt sich

$$\frac{d^nu}{dx^n}=\frac{d^nu}{dv^n}(\alpha_1^n+\ldots)+\ldots\left(\text{bezw.}=\frac{d^nu}{dv^n}(\beta_1^n+\ldots)+\ldots\right);$$

hier sind durch Punkte höhere Potenzen von $\begin{cases}x-a\\x'\end{cases}$ bezw. geringere Differentialquotienten angedeutet. Sonach sind in

$\frac{d^n u}{dv^n} + \sum_1^n \varphi_\nu \frac{d^{n-\nu} u}{dv^{n-\nu}} = 0$ alle φ_ν regulär, da es die f_ν für $x = a$ bezw. für $x' = 0$ waren.

An einem Verzweigungspunkt $\mathfrak{p}_\lambda$ jedoch soll nach Annahme in

$$\overline{D}_{t_\lambda}(u) = \frac{d^n u}{dt_\lambda^n} + \sum_1^n \overline{f}_\nu \frac{d^{n-\nu} u}{dt_\lambda^{n-\nu}} \quad (x = a_\lambda + t_\lambda^2)$$

$\overline{f}_\nu$ regulär sein; andererseits ist dort

$$v = v(\mathfrak{p}_\lambda) + \int_{\mathfrak{p}_\lambda}^{\mathfrak{p}} \frac{dx}{\sqrt{f}} = v(\mathfrak{p}_\lambda) + \gamma t_\lambda + \ldots (\gamma \neq 0),$$

woraus wie soeben folgt, daß φ_ν auch an den Stellen $v(\mathfrak{p}_\lambda)$ regulär ist. Infolgedessen reduziert sich die Differentialgleichung in der v-Ebene auf eine solche mit konstanten Koeffizienten $\sum_0^n A_\nu \frac{d^{n-\nu} u}{dv^{n-\nu}} = 0$, da ja die $\varphi_\nu(v)$ elliptische Funktionen und im Endlichen überall regulär sind. Entsprechend vereinfacht sich die Betrachtung hier durchgängig, wenn man in die v-Ebene übergeht. Es kam mir aber darauf an, wenigstens in den einfachsten Fällen die Differentialgleichung direkt algebraisch in der Fläche $\mathfrak{R}$ aufzustellen, ohne von dem Satze Gebrauch zu machen, daß die Umkehrfunktion des elliptischen Integrals erster Gattung eindeutig ist.

Wir betrachten jetzt den hyperelliptischen Fall

$$y^2 = \prod_1^{2p+2}{}_\lambda (x - a_\lambda) = f \quad (p > 1).$$

Durch Anwendung der gleichen Methoden findet man, daß alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit lauter uneigentlich singulären Punkten zweiter Art in den Verzweigungspunkten die Form haben

$$f \frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{f'}{2} + h^{(p)}(x)\sqrt{f}\right)\frac{du}{dx} + \left(g_1^{(2p)}(x) + h_1^{(p-1)}(x)\sqrt{f}\right) u = 0.$$

Dabei sind

$$h^{(p)}(x) = \sum_0^p A_\nu x^{p-\nu}; \quad g_1^{(2p)}(x) = \sum_0^{2p} B_\nu (x)^{2p-\nu};$$

$$h_1^{(p-1)}(x) = \sum_0^{p-1} C_\nu x^{p-1-\nu}$$

Polynome höchstens des angegebenen Grades. Aus den früheren (S. 51) folgt nun, daß die Differentialgleichung (für $p > 1$) unmöglich mehr in beiden unendlich fernen Punkten regulär sein kann. Wir wollen aber durch Zulassung von Nebenpunkten dort wenigstens reguläres Verhalten der Integrale hervorrufen. Es wird im Unendlichen die Differentialgleichung mit $x = \frac{1}{t}$

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + t\left(-(p-1) \mp A_0 + \left(\frac{a_1}{2} \pm \left(A_1 - A_0 \frac{a_1}{2}\right)\right) t + \ldots\right) \frac{du}{dt}$$

$$+ \left(B_0 \pm C_0 + \left(B_1 - B_0 a_1 \pm \left(C_1 - \frac{C_0 a_1}{2}\right)\right) t + \ldots\right) u = 0,$$

wobei gesetzt ist $f = x^{2p+2} + a_1 x^{2p+1} + \ldots + a_{2p+2}$ und die oberen bezw. unteren Zeichen, je einem Blatt entsprechend, für sich zusammengehören.

(Man hat $f' = t^{-2p-1}\left((2p+2) + (2p+1) a_1 t + \ldots\right)$

$$\frac{f'}{2f} = \frac{t}{2}\left((2p+2) - a_1 t + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \pm t^{p+1}\left(1 - \frac{a_1}{2} t + \ldots\right)\Big).$$

Wir haben jetzt zu fordern, daß die Wurzeln der determinierenden Gleichungen $r^2 - (p \pm A_0) r + B_0 \pm C_0 = 0$ positive ganze Zahlen (oder Null) sind.

Sei etwa im 1. Blatt $r_1 > r_2 \geqq 0$

2. Blatt $\bar{r}_1 > \bar{r}_2 \geqq 0$, wobei

$r_1 + r_2 + \bar{r}_1 + \bar{r}_2 = 2p$ sein muß (auch aus früherem zu schließen) und $r_1 \neq r_2$; $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2$, weil sonst sicher Logarithmen auftreten. Gibt man r_1, r_2; $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ mit diesen Einschränkungen beliebig vor ($r_1 = \bar{r}_1 = 1$; $r_2 = \bar{r}_2 = 0$ ist dadurch offenbar ausgeschlossen!), so sind A_0, B_0, C_0 vollständig bestimmt.

Man hat dann noch in beiden Blättern die Bedingung der Logarithmen-Freiheit zu erfüllen. Sie ist (vgl. S. 15 und Horn S. 163/164)

$$D_{r_1-r_2}(r_2)=0 \text{ bezw. } \bar{D}_{\bar{r}_1-\bar{r}_2}(\bar{r}_2)=0.$$

Das gibt zwei Gleichungen für die höheren Koeffizienten; wir rechnen nur den Fall $r_1-r_2=\bar{r}_1-\bar{r}_2=1$ explizite durch. Es liefert die Rekursionsformel[1])

$$D_1(r)\,f_0(r+1)+D_0(r)\,f_1(r)=0$$

bezw.
$$\bar{D}_1(r)\,\bar{f}_0(r+1)+\bar{D}_0(r)\,\bar{f}_1(r)=0.$$

Hier ist

$$f_0(r)=r^2-(p+A_0)\,r+B_0+C_0=(r-r_1)\,(r-r_2)$$
$$\bar{f}_0(r)=r^2-(p-A_0)\,r+B_0-C_0=(r-\bar{r}_1)\,(r-\bar{r}_2)$$
$$f_1(r)=\left(\frac{a_1}{2}+A_1-A_0\,\frac{a_1}{2}\right)r+B_1-B_0\,a_1+C_1-\frac{C_0\,a_1}{2}$$
$$\bar{f}_1(r)=\left(\frac{a_1}{2}-A_1+A_0\,\frac{a_1}{2}\right)r+B_1-B_0\,a_1-C_1+\frac{C_0\,a_1}{2}$$

und man kann setzen $D_0(r)=r-r_2$; $\bar{D}_0(r)=r-\bar{r}_2$. Wegen $D_1(r)\,\frac{f_0(r+1)}{D_0(r)}+f_1(r)=0$ folgt daher für $r\to r_2$ aus $D_1(r_2)=0$, daß $f_1(r_2)=0$ und umgekehrt, sodaß wir die Bedingungen $f_1(r_2)=0$ und $\bar{f}_1(\bar{r}_2)=0$ erhalten. Diese beiden Gleichungen sind nach B_1, C_1 auflösbar; A_1 ist beliebig. Damit ist die Differentialgleichung fertig, sie enthält noch

p Konstante $A_1, A_2 \ldots A_p$
$2p-1$ „ $B_2, B_3 \ldots B_{2p}$
$p-2$ „ $C_2, C_3 \ldots C_{p-1}$, im ganzen noch
$4p-3$ Konstante.

Wir wollen noch fragen, ob $r_1=\bar{r}_1$ gewählt werden kann. Das liefert $r_1=\bar{r}_1=\frac{p+1}{2}$, ist also nur für ungerade p zulässig. Es wird dann $A_0=0$; $B_0=\frac{(p-1)\,(p+1)}{4}$; $C_0=0$,

[1]) Die hier in der üblichen Weise eingeführten Bezeichnungen $f_0(r)$, $f_1(r)$ werden nicht mit den früher $f_0=1, f_1$ genannten Koeffizienten der Differentialgleichung zu verwechseln sein.

weiter $B_1 = \frac{p(p-1)}{4} a_1;\ C_1 = -\frac{p-1}{2} A_1.$

Nun ist

$$g_1^{(2p)}(x) = \frac{(p-1)(p+1)}{4} x^{2p} + \frac{(p-1)p}{4} a_1 x^{2p-1} + \ldots ,$$

$$f'' = (2p+2)(2p+1) x^{2p} + (2p+1) 2p a_1 x^{2p-1} + \ldots ,$$

also

$$g_1^{(2p)}(x) = \frac{p-1}{8(2p+1)} f''(x) + G^{(2p-2)}(x), \text{ also}$$

$$f \frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{f'}{2} + h^{(p-1)}(x)\sqrt{f}\right) \frac{du}{dx} + \frac{p-1}{8(2p+1)} \times$$

$$\left(f'' + G^{(2p-2)}(x) - \left(4A_1(2p+1) x^{p-2} + H^{(p-3)}(x)\right)\sqrt{f}\right) u = 0.$$

Dabei sind G, H wieder neue Polynome höchstens des angegebenen Grades, $h(x)$ hat die gleiche Bedeutung wie vorher.

Für $h(x) \equiv 0$ ist das (abgesehen von der homogenen Schreibweise dort) die von Klein (Math. Ann. Bd. 38 S. 147) für die „nirgends singulären" Differentialgleichungen 2. Ordnung auf dem hyperelliptischen Gebilde angegebene Gestalt.

§ 14.

Die Integrale in der ganzen Fläche.

Nachdem wir das Verhalten der Integrale an einer einzelnen singulären Stelle studiert haben und Differentialgleichungen gebildet haben, die an vorgeschriebenen Stellen ein vorgeschriebenes Verhalten zeigen, handelt es sich jetzt um den Gesamtverlauf der Integrale bei beliebiger Fortsetzung in der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. Dabei beschränken wir uns auf die Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse; für diese ist es auf Grund der determinierenden Gleichung möglich, an jeder einzelnen Stelle die Umlaufssubstitutionen anzugeben, die ein Fundamentalsystem an dieser Stelle erleidet. Wir schließen uns im folgenden in den Grundzügen an die Arbeit von Appell, Acta Math. 13 an, wobei sich aber in mancher Hinsicht Erweiterungen und Ver-

einfachungen ergeben. Es sei zunächst eine Differentialgleichung vorgelegt, für die die Wurzeln der determinierenden Gleichungen sämtlich ganze (positive oder negative) Zahlen (oder 0) sind, und überdies alle Integrale logarithmenfrei sind. Dann sind die Integrale sämtlich in der Umgebung jeder einzelnen Stelle von $\mathfrak{R}$ relativ zur Fläche unverzweigt und bis auf Pole regulär. Es folgt aber natürlich nicht, daß sie etwa auf $\mathfrak{R}$ eindeutige Funktionen wären, wie man schon aus den Beispielen S. 50 erkennt. Denn bei einem Periodenumlauf, der das Integral 1. Gattung um Ω verändert, wird u in $e^{\Omega} u$ bzw. $C_1 u_1 + C_2 e^{\Omega} u_2$ übergehen ($u_1 = 1$; $u_2 = \int \eta \, dx$). Wir werden daher, wie bei der Untersuchung der Abelschen Integrale, die Fläche vom Geschlecht p durch p Paare konjugierter Rückkehrschnitte a_λ, b_λ mit Verbindungsschnitten c_λ in eine einfach zusammenhängende verwandeln; wir legen diese Schnitte so an und bezeichnen ihre Ufer derart, daß ein Umlauf um den ganzen Rand der Fläche, die links bleiben soll, in folgender Weise möglich ist:

$a_1^- b_1^- a_1^+ b_1^+ c_1^- a_2^- b_2^- a_2^+ b_2^+ c_2^- \ldots \quad a_{p-1}^- b_{p-1}^- a_{p-1}^+ b_{p-1}^+ c_{p-1}^-$

(s. Fig. 1 der Tafel) $\quad a_p^- b_p^- a_p^+ b_p^+ c_{p-1}^+ c_{p-2}^+ \ldots c_2^+ c_1^+ .$

Ferner seien die Schnitte so gewählt, daß kein Verzweigungspunkt der Fläche und kein singulärer Punkt der Differentialgleichung getroffen wird. Die zerschnittene, einfach zusammenhängende, offene Fläche heiße $\mathfrak{R}'$.

Ein beliebiges Integral u der Differentialgleichung läßt sich dann nach jedem Punkt der Fläche meromorph fortsetzen und ist daher nach dem Monodromiesatze (Weyl S. 54) notwendig im Innern eindeutig. Man kann u auch nach allen Punkten des Randes analytisch fortsetzen; aber bei der Annäherung von verschiedenen Ufern her können wir nicht verlangen, daß man zum nämlichen Ergebnis kommt.

Vielmehr sei jetzt mit u_ν ein Fundamentalsystem bezeichnet, ferner seien $\mathfrak{a}_\lambda^+$, $\mathfrak{a}_\lambda^-$ zwei gegenüberliegende Punkte des Schnitts a_λ (die in Wahrheit auf $\mathfrak{R}$ zusammenfallen und nur in der Figur getrennt gezeichnet sind). Es seien $u_\nu(\mathfrak{a}_\lambda^+)$ und $u_\nu(\mathfrak{a}_\lambda^-)$ die durch

Fortsetzung innerhalb $\mathfrak{R}'$ nach den Punkten a_λ^+, a_λ^- gewonnenen Potenzreihen. Dann muß offenbar ein System von Gleichungen bestehen

$$u_\nu(a_\lambda^+) = \sum_1^n{}_\varkappa A_{\nu\varkappa}^{(\lambda)} u_\varkappa(a_\lambda^-),$$

wo die $A_{\nu\varkappa}^{(\lambda)}$ Konstante sind, und man erkennt durch Fortsetzung längs des Schnittes a_λ, daß diese Beziehungen für irgend zwei beliebige gegenüberliegende Punkte von a_λ gelten müssen. Wir schreiben $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$

$$u_\nu(a_\lambda^+) = \sum_1^n{}_\varkappa A_{\nu\varkappa}^{(\lambda)} u_\varkappa(a_\lambda^-) \quad \text{oder} \quad u(a_\lambda^+) = S_\lambda u(a_\lambda^-),$$

indem wir mit $S_\lambda = \left(A_{\nu\varkappa}^{(\lambda)}\right)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{(\lambda)} \ldots A_{1n}^{(\lambda)} \\ A_{n1}^{(\lambda)} \ldots A_{nn}^{(\lambda)} \end{pmatrix},$$

mit $S_\lambda u$ die durch sie definierte lineare homogene Transformation bezeichnen. (Man sieht auch leicht, daß $S_\lambda u$ erhalten wird durch Fortsetzung längs b_λ^- im positiven Sinne; es ist ja (s. Fig. 1) $u(\mathfrak{r}_\lambda) = S_\lambda u(\mathfrak{q}_\lambda)$, während $\mathfrak{r}_\lambda$ durch Umlauf längs b_λ im positiven Sinne von $\mathfrak{q}_\lambda$ aus erreicht werden kann).

Entsprechendes gilt für die Schnitte b_λ; dort wird

$$u(b_\lambda^+) = T_\lambda u(b_\lambda^-)$$

und die Substitution $T_\lambda u$ kann hervorgerufen werden, indem man längs a_λ^+ im positiven Sinne fortsetzt.

Endlich gelten längs der Schnitte c_λ Relationen der Form

$$u(c_\lambda^+) = \Sigma_\lambda u(c_\lambda^-) \quad (\lambda = 1, 2 \ldots p-1).$$

Da auch umgekehrt eine Beziehung besteht $u(a_\lambda^-) = S'_\lambda u(a_\lambda^+)$, so folgt $u(a_\lambda^+) = S_\lambda S'_\lambda u(a_\lambda^+)$, d. h. $S_\lambda S'_\lambda = E$ und durch Übergang zu den Determinanten $|S_\lambda||S'_\lambda| = 1$ also $|S_\lambda| \neq 0$ und es ist S_λ umkehrbar: $S'_\lambda = S_\lambda^{-1}$, entsprechend für T_λ und Σ_λ.

Kennt man die $3p-1$ Substitutionen, durch die jeweils die Fortsetzungen eines Fundamentalsystems u_ν innerhalb $\mathfrak{R}'$ nach gegenüberliegenden Punkten eines der Schnitte a_λ, b_λ, c_λ miteinander zusammenhängen, so lassen sich alle Veränderungen berechnen, die u_ν und damit ein beliebiges Integral bei analy-

tischer Fortsetzung auf der ursprünglichen Fläche $\mathfrak{R}$ erleidet. Es genügt, sich auf geschlossene Wege $\mathfrak{C}$ zu beschränken, da man jeden ungeschlossenen $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$ zu einem geschlossenen $\mathfrak{C} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) + ((\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}))$ ergänzen kann, wo $((\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}))$ ganz in der zerschnittenen Fläche verläuft; dann ist $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = \mathfrak{C} + ((\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}))$, wo $((\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}))$ in $\mathfrak{R}'$ verläuft, in welcher ohnedies die u_ν eindeutig sind. Ferner darf angenommen werden, daß $\mathfrak{C}$ den Rand von $\mathfrak{R}'$ höchstens in endlich vielen Punkten trifft (man kann sich ja bei analytischer Fortsetzung sogar auf Polygonzüge beschränken).

Es seien nun $\mathfrak{p}_1^{(1)}\,\mathfrak{p}_1^{(2)}\,\ldots\,\mathfrak{p}_r^{(1)}\,\mathfrak{p}_r^{(2)}$ (siehe Fig. 2) die Punkte, in denen der Rand der Reihe nach getroffen wird; bezeichnen wir jeweils mit $u_\nu(\mathfrak{p}_\varrho^{(1)})$ bezw. $u_\nu(\mathfrak{p}_\varrho^{(2)})$ die Werte, die bei Fortsetzung von u_ν von $\mathfrak{a}$ aus innerhalb $\mathfrak{R}'$ nach gegenüberliegenden Punkten entstehen, so ist

$$
\begin{aligned}
&u_\nu(\mathfrak{p}_1^{(2)}) = U_1\left(u_\nu(\mathfrak{p}_1^{(1)})\right),\\
&u_\nu(\mathfrak{p}_2^{(2)}) = U_2\left(u_\nu(\mathfrak{p}_2^{(1)})\right),\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\\
&u_\nu(\mathfrak{p}_r^{(2)}) = U_r\left(u_\nu(\mathfrak{p}_r^{(1)})\right), \text{ also}\\
&u_\nu(\mathfrak{p}_r^{(2)}) = U_r\ U_{r-1}\ U_{r-2}\ \ldots\ U_2\ U_1\left(u_\nu(\mathfrak{p}_1^{(1)})\right);
\end{aligned}
$$

wegen der eindeutigen Fortsetzung in der zerschnittenen Fläche $\mathfrak{R}'$ ist also dann $\bar{u}_\nu(\mathfrak{a}) = U_r\ U_{r-1}\ \ldots\ U_2\ U_1\left(u_\nu(\mathfrak{a})\right)$, unter $\bar{u}_\nu$ die Fortsetzung von u_ν längs der Kurve $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{R}$ verstanden. Hier waren mit $U_1, U_2, \ldots U_r$ der Reihe nach die Substitutionen bezeichnet, die längs der von $\mathfrak{C}$ getroffenen Schnitte herrschen, die aber sämtlich unter den S_λ, T_λ, Σ_λ vorkommen, womit die Behauptung bewiesen ist.

Die Substitutionen S_λ, T_λ, Σ_λ nebst ihren sämtlichen Produkten bilden daher die sogenannte Monodromiegruppe der Differentialgleichung, wenn man so die Gesamtheit aller Substitutionen bezeichnet, welche ein Fundamentalsystem bei Fortsetzung auf $\mathfrak{R}$ erleiden kann. Übrigens sind die S_λ, T_λ, Σ_λ nicht voneinander unabhängig. Betrachten wir nämlich einen der Kreuzungspunkte $\mathfrak{k}_\lambda$, und zwar für $\lambda \neq 1$, p $(p > 2)$. Dann erhalten wir beim Umlauf um denselben, die 6 am Rand der ver-

schiedenen Felder gelegenen Exemplare von k_λ mit $\mathfrak{p}_\lambda$, $\mathfrak{q}_\lambda$, $\mathfrak{r}_\lambda$, $\mathfrak{s}_\lambda$, $\mathfrak{t}_\lambda$, $\mathfrak{u}_\lambda$ bezeichnend (s. Fig. 1),

$$u(\mathfrak{u}_\lambda) = \Sigma_\lambda u(\mathfrak{p}_\lambda)$$
$$u(\mathfrak{p}_\lambda) = T_\lambda u(\mathfrak{q}_\lambda)$$
$$u(\mathfrak{q}_\lambda) = S_\lambda^{-1} u(\mathfrak{r}_\lambda)$$
$$u(r_\lambda) = T_\lambda^{-1} u(\mathfrak{s}_\lambda)$$
$$u(\mathfrak{s}_\lambda) = S_\lambda u(\mathfrak{t}_\lambda)$$
$$u(\mathfrak{t}_\lambda) = \Sigma_{\lambda-1}^{-1} u(\mathfrak{u}_\lambda)$$

also durch Einsetzen ineinander

$$\Sigma_\lambda T_\lambda S_\lambda^{-1} T_\lambda^{-1} S_\lambda \Sigma_{\lambda-1}^{-1} = E, \text{ ferner für } \lambda = 1 \,(p > 1)$$
$$\Sigma_1 T_1 S_1^{-1} T_1^{-1} S_1 = E, \text{ und für } \lambda = p \quad (p > 1)$$
$$T_p S_p^{-1} T_p^{-1} S_p \Sigma_{p-1}^{-1} = E.$$

Hieraus folgt, daß alle Σ_λ bekannt sind, wenn man die S_λ und T_λ kennt. Denn man erhält:

$\Sigma_1 = S_1^{-1} T_1 S_1 T_1^{-1}$, sodann für $\lambda = 2$

$\Sigma_2 = S_1^{-1} T_1 S_1 T_1^{-1} S_2^{-1} T_2 S_2 T_2^{-1}$, allgemein für $\lambda \leqq p-1$

$\Sigma_\lambda = S_1^{-1} T_1 S_1 T_1^{-1} S_2^{-1} T_2 S_2 T_2^{-1} \ldots S_\lambda^{-1} T_\lambda S_\lambda T_\lambda^{-1}$

und daher für $\lambda = p$

$$T_p S_p^{-1} T_p^{-1} S_p T_{p-1} S_{p-1}^{-1} T_{p-1}^{-1} S_{p-1} \ldots T_1 S_1^{-1} T_1^{-1} S_1 = E.$$

Für $p = 1$, wo noch keine Schnitte c_λ auftreten, ist

$$TS^{-1}T^{-1}S = E \text{ oder } ST = TS,$$

d. h. die Substitutionen sind hier miteinander vertauschbar, was im allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht. Hierauf beruhen die Vereinfachungen, die sich in der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Koeffizienten bemerkbar machen. Immer dann, wenn die S_λ, T_λ vertauschbar sind, sind die Σ_λ sämtlich $= E$.

Wendet man nun die Theorie der Matrizen und linearen Substitutionen hier an, so ergibt sich ganz entsprechend wie bei den Umläufen um einen einzelnen Punkt durch Betrachtung der Gleichungen $|S_\lambda - \omega E| = 0$ usw., daß es stets mindestens ein Integral gibt, das sich am Querschnitt multiplikativ verhält, d. h. die Eigenschaft hat, daß

$$u(a_\lambda^+) = \omega\, u(a_\lambda^-),$$

sodaß also die Werte an entgegengesetzten Ufern nur um einen konstanten Faktor verschieden sind; allgemein gibt es genau l_λ solche Integrale, wenn die Determinante $|S_\lambda - \omega E|$ l_λ verschiedene Elementarteiler hat, also z. B. dann n verschiedene, wenn alle Wurzeln $\omega_1, \ldots \omega_n$ derselben voneinander verschieden sind; entsprechend für die Schnitte T_λ, Σ_λ. Es ist denkbar, daß ein und dasselbe Integral sich an allen Querschnitten nur um einen Faktor ändert; es ist dann von selbst $\Sigma_\lambda = E$; solche Funktionen heißen multiplikativ und sind Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen gewesen (unabhängig von den Differentialgleichungen; außer Appell a. a. O. siehe z. B. Ritter, Multiplikative Formen, Math. Ann. 44, 47). Die Integrale multiplikativer Funktionen erleiden an den Querschnitten dann ganze nichthomogene Substitutionen, es sind Prymsche Funktionen (Prym-Rost, Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung, Teubner 1911). Natürlich genügen sie ebenfalls linearen Differentialgleichungen, und zwar der nächsthöheren Ordnung.

Wir betrachten endlich noch den Fall einer beliebigen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse; alsdann brauchen die Integrale auf $\mathfrak{R}'$ nicht mehr eindeutig zu sein, sie sind es aber in der Fläche $\mathfrak{R}''$, die aus $\mathfrak{R}'$ folgendermaßen entsteht: Wir schließen die neuen singulären Punkte $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_s$ durch beliebig kleine Kreise $K_1, \ldots K_s$ auf $\mathfrak{R}'$ aus und schneiden dann $\mathfrak{R}'$ längs dieser sowie einer Kurve $\mathfrak{C}'$ auf, die die Kreise der Reihe nach berührt, von einem Kreuzungspunkt, etwa $\mathfrak{k}_1$, ausläuft und in $\mathfrak{p}_s$ endigt, ohne sich selbst zu schneiden oder den Rand von $\mathfrak{R}'$ oder singuläre oder Verzweigungspunkte zu treffen. Der neue Rand von $\mathfrak{R}''$ sei dann, mit Fläche links durchlaufen, folgender (Fig. 3):

$$l_1^- l_2^- \ldots l_s^- K_s l_s^+ K_{s-1} \ldots K_1 l_1^+ a_1^- b_1^- a_1^+ b_1^+ \ldots c_{p-1}^+ \ldots c_1^+ .$$

Es treten nun die s-Substitionen $u\left(l_\sigma^+\right) = L_\sigma\left(u\left(l_\sigma^-\right)\right)$ hinzu. Ferner mögen zu den Punkten $\mathfrak{p}_\sigma$ Fundamentalsysteme mit den Umlaufssubstitutionen Q_σ gehören; kennt man noch die Übergangssubstitutionen V_σ, die das betreffende Fundamentalsystem

für $\mathfrak{p}_\sigma$ in dasjenige von $\mathfrak{p}_{\sigma+1}$ überführen, so kennt man auch L_σ; denn es wird

$$\begin{aligned} L_s &= Q_s \\ L_{s-1} &= Q_{s-1} V_{s-1}^{-1} Q_s V_{s-1} \\ L_{s-2} &= Q_{s-2} V_{s-2}^{-1} Q_{s-1} V_{s-1}^{-1} Q_s V_{s-1} V_{s-2} \\ L_\sigma &= Q_\sigma V_\sigma^{-1} Q_{\sigma+1} V_{\sigma+1}^{-1} \cdots V_{s-1}^{-1} Q_s V_{s-1} V_{s-2} \cdots V_\sigma . \end{aligned}$$

Bezüglich der $S_\lambda, T_\lambda, \Sigma_\lambda$ ändert sich nichts Wesentliches, nur hat man an Stelle der Relation S. 63 f. $\lambda = 1$ zu schreiben:

$$L_1^{+1} \Sigma_1 T_1 S_1^{-1} T_1^{-1} S_1 = E,$$

sodaß wird

$$\Sigma_1 = L_1^{-1} S_1^{-1} T_1 S_1 T_1^{-1}$$

und allgemein

$$\Sigma_\lambda = L_1^{-1} S_1^{-1} T_1 S_1 T_1^{-1} \ldots S_\lambda^{-1} T_\lambda S_\lambda T_\lambda^{-1}$$

und

$$T_p S_p^{-1} T_p^{-1} S_p T_{p-1} S_{p-1}^{-1} T_{p-1}^{-1} S_{p-1} \ldots T_1 S_1^{-1} T_1^{-1} S_1 L_1 = E.$$

Was nun die Berechnung der Substitutionen $S_\lambda, T_\lambda, V_\sigma$ betrifft, so erscheint dieselbe vermöge § 2 S. 8/9 ff. auf das entsprechende Problem bei Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten zurückgeführt. Denn wir hatten dort ein Fundamentalsystem in der Form erhalten

$u_\nu = \sum_1^m U_\nu^{(\mu)} \eta^{(\mu)}$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ und die $U_\nu^{(\mu)}$ waren irgend n linear unabhängige Integralsysteme eines Differentialsystems erster Ordnung mit mn Unbekannten und rationalen Koeffizienten oder vielmehr $U_\nu^{(1)}, \ldots U_\nu^{(m)}$ die m ersten Funktionen eines solchen, s. S. 11. Setzen wir nun u_ν auf $\mathfrak{R}$ analytisch fort, so genügt es, da die $\eta_\nu^{(\mu)}$ dort eindeutig sind, $U_\nu^{(\mu)}$ fortzusetzen. Dies erfolgt in der schlichten Ebene und erfordert bekanntlich die Kenntnis von Umlaufs- und Übergangssubstitutionen. Sei eine solche $\overline{U}_\nu^{(\mu)} = \sum_1^{mn} a_{\nu\varrho} U_\varrho^{(\mu)}$. (Wir brauchen nur zu betrachten $\nu = 1, 2, \ldots n$.) Dann wird

$$\bar{u}_\nu = \sum_1^m \sum_1^{mn} a_{\nu\varrho} U_\varrho^{(\mu)} \eta^{(\mu)} = \sum_1^{mn} \sum_1^m a_{\nu\varrho} U_\varrho^{(\mu)} \eta^{(\mu)}.$$

Nun muß aber nach früherem sein (§ 2 S. 11)

$$(\text{f. } \varrho = n+1, \ldots m\,n) \quad u_\varrho = \sum_1^m{}^{\mu} U_\varrho^{(\mu)} \eta^{(\mu)} = \sum_1^n{}^{\varkappa} c_{\varrho\varkappa} u_\varkappa ,$$

$$\text{also } \bar{u}_\nu = \sum_1^n{}^{\varkappa} b_{\nu\varkappa} u_\varkappa , \text{ wo } b_{\nu\varkappa} = a_{\nu\varkappa} + \sum_{n+1}^{m\,n}{}^{\varrho} a_{\nu\varrho} c_{\varrho\varkappa} ,$$

womit die betreffende Substitution für u_ν gefunden ist.

Fig. 1.

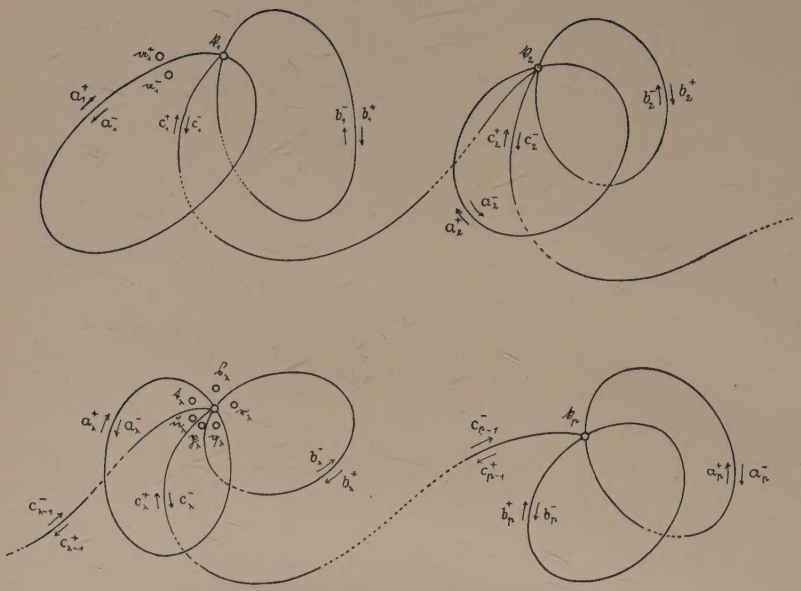
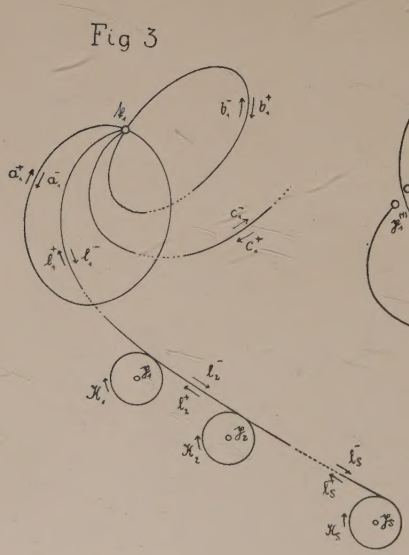


Fig 3



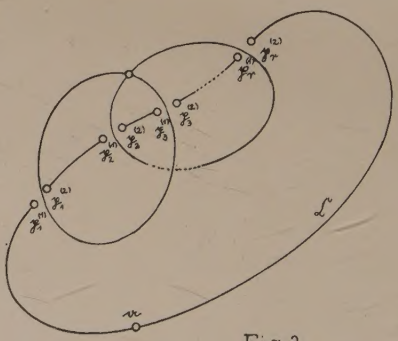


Fig 2.

Lebenslauf.

Ich, Hermann Schmidt, bin geboren am 22. Juli 1902 zu Merkendorf (Mfr.) als Sohn des ev. Pfarrers Ferdinand Schmidt und seiner Ehefrau Anna, geb. Düring. Ich besuchte 1909—1913 die Volksschule zu Oberröslau (Ofr.), sodann 1913—1917 das Progymnasium Oettingen i. B. und 1917/20 das humanistische Gymnasium Ansbach. Nach Ablegung der Reifeprüfung im Juli 1920 wurde ich in das Maximilianeum aufgenommen und studierte als dessen Angehöriger 1920—1924 in München an der Universität und Technischen Hochschule Mathematik und Physik. Ich habe in diesen und den folgenden Jahren Vorlesungen bzw. Übungen besucht bei den Herren Carathéodory, Doehlemann, Hartogs, Lindemann, Perron, Pringsheim, Rosenthal, Tietze, Volk, Voß in Mathematik; Graetz, Herzfeld, Sommerfeld, Wentzel, Wien in Physik; Becher, Gallinger in Philosophie. Es ist mir ein ehrliches Bedürfnis, hier meinen besonderen Dank an Herrn Professor Perron auszusprechen, dessen Vorlesungen, Übungen und persönliche Anregung ich seit meinem 5. Semester genießen durfte.

Oktober 1924 und Juli 1925 bestand ich die beiden Abschnitte der Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik; in der Zwischenzeit nahm ich am Pädagogisch-didaktischen Seminar am Neuen Realgymnasium dahier teil. Ab 1. Dezember 1924 wurde ich als Hilfsassistent, ab 15. Mai 1925 als Vollassistent am Mathematischen Institut der Technischen Hochschule eingestellt, wo ich noch tätig bin.

Die gegenwärtige Arbeit ist die (etwas gekürzte) Behandlung einer von der Philosophischen Fakultät 2. Sektion der Universität München gestellten Preisaufgabe und hat am 18. Juni 1927 den Preis erhalten. München, Juli 1927.